

Stochastische Prozesse II

Übungen

Besprechungstermin: 22.5.12, 14.30 Uhr

In den folgenden Aufgaben sei W eine stetige \mathbb{F} -BM.

Aufgabe 13. (Stratonovich-Integral)

In Beispiel 3.1 der Vorlesung wurde das Integral

$$\int_0^t W_s^Z dW_s$$

definiert. Zeigen sie, dass bei Wahl der Zwischenpunkte $t_j^* = (t_{j-1} + t_j)/2$ gilt:

$$\int_0^t W_s^Z dW_s \xrightarrow{L^2} \frac{W_t^2}{2} \quad (\delta(Z) \rightarrow 0).$$

Der so erhaltene Grenzwert heißt Stratonovich-Integral von W bzgl. W .

Hinweis: Für $a_j, b_j \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sum_1^n a_j(b_j - b_{j-1}) = \frac{1}{2}b_n^2 - \frac{1}{2}b_0^2 - \frac{1}{2} \sum_1^n (b_j - b_{j-1})^2 + \sum_1^n (a_j - b_{j-1})^2 + \sum_1^n (b_j - a_j)(a_j - b_{j-1})$$

Aufgabe 14 Sei

$$X_t := \mathcal{E}(aW)_t - 1, \quad t \geq 0, a \neq 0.$$

Zeigen Sie für $X = (X_t)_{t \geq 0}$:

$$X \in \mathcal{M}^2, X \notin \mathcal{H}^2, X \in \mathcal{H}_{lok}^2.$$

Aufgabe 15 Zeigen Sie für $H, K \in \mathcal{L}^2(W)$:

$$H = K \lambda \otimes \text{P-f.s.} \Rightarrow H \bullet W = K \bullet W \text{ P-f.s. (nicht unterscheidbar)}$$

Aufgabe 16 Sei $H := 1_{\{W_1 < 0\}} 1_{(1,2]}$. Zeigen Sie mit Hilfe von $H \bullet W$, dass

$$1_{\{W_1 < 0\}}((W_{2 \wedge t} - W_{1 \wedge t})^2 - (2 \wedge t - 1 \wedge t))_{t \geq 0} \in \mathcal{M}$$