H. Luschgy SS 2014

Blatt 3

Stochastische Prozesse II

Übungen

Besprechungstermin: 15.5.14, 14.30 Uhr

$(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ und $(\mathcal{Y}, \mathcal{B})$ seien messbare Räume.

Aufgabe 9. Beweisen Sie bitte Lemma 2.3 a), b) der Vorlesung.

Aufgabe 10. (Vorhersehbarkeit)
$X = (X_t)_{t \geq 0}$ sei ein $\mathcal{X}$-wertiger, -vorhersehbarer Prozess. Zeigen Sie:

X ist $\mathbb{F}_-$-adaptiert, wobei $\mathbb{F}_- = (\mathcal{F}_{t-})_{t \geq 0}$ und $\mathcal{F}_{t-} := \sigma(\bigcup_{0 \leq s < t} \mathcal{F}_s), t > 0, \mathcal{F}_{0-} := \mathcal{F}_0$.

Aufgabe 11. (Vgl. Satz 1.7)
a) $= (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ sei eine Filtration, X progressiv (vorhersehbar), $\mathcal{X}$-wertig und τ eine Stopzeit. Zeigen Sie, dass X^τ progressiv (vorhersehbar) ist.
Hinweis: Man betrachte $\varphi : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}_+ \times \Omega,\ \varphi(s, \omega) = (\tau(\omega) \wedge s, \omega)$.

b) X sei $\mathcal{X}$-wertig, progressiv (vorhersehbar), $f : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ sei $(\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \bigotimes \mathcal{A}, \mathcal{B})$-messbar und $Y_t := f(t, X_t)$. Zeigen Sie, dass dann $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$ auch progressiv (vorhersehbar) ist.

Aufgabe 12. (Absorption)
$X = (X_t)_{t \geq 0}$ sei ein stetiges -Martingal mit $X_t \geq 0$ f.s. für alle $t \geq 0$ und

$$\tau := \inf\{t \geq 0 : X_t = 0\}.$$

Zeigen Sie:

$$X = 0 \text{ f.s. (nicht unterscheidbar) auf } [\tau, \infty).$$

(Dieses Resultat gilt auch für stetige positive Supermartingale.)

Hinweis: Optional sampling.