Stochastische Prozesse II

Übungen

Besprechungstermin: 8.5.12, 14.30 Uhr

Aufgabe 5. W sei eine stetige $\mathbb{F}$-BM.
a) Für $x, y > 0$ sei

$$\tau := \tau_{\{x,-y\}} = \inf\{t \geq 0 : W_t = x \text{ oder } W_t = -y\}.$$

Zeigen Sie: $E\tau = xy$.

Hinweis: Optional sampling für das $\mathbb{F}$-Martingal $(W_t^2 - t)_{t\geq 0}$ und Beispiel 1.9.

b) Für $x \geq 0$ sei

$$\tau_x := \inf\{t \geq 0 : W_t = x\}$$

(first passage time). Zeigen Sie für die Laplace-Transformierte

$$E \exp(-s\tau_x) = \exp(-\sqrt{2s}x), s \geq 0.$$

Hinweis: Optional sampling für das Doléans-Exponential $\mathcal{E}(aW), a \geq 0$.

Aufgabe 6. (Wann sind lokale Martingale schon Martingale?)
Zeigen Sie für $X \in \mathcal{M}_{lok}$:

$$E \sup_{s\leq t} |X_s| < \infty \ \forall t \ \Rightarrow \ X \in \mathcal{M}.$$

$$E \sup_{s\leq t} X_s^2 < \infty \ \forall t \ \Leftrightarrow \ X \in \mathcal{M}^2.$$

Hinweis: Satz 1.16.

Aufgabe 7. (Lokale Martingale) Zeigen Sie:
a) $X \in \mathcal{M}_{lok} \Rightarrow X$ ist ein lokales beschränktes Martingal, d.h. es gibt lokalisierende Folge $(\tau_k)_k$ von Stopzeiten und eine Folge $(c_k)_k$ in $\mathbb{R}_+$ mit $\sup_{t\geq 0}|X_t^{\tau_k}| \leq c_k$ auf Ω und $X^{\tau_k} \in \mathcal{M}\ \forall k \in \mathbb{N}$.

Hinweis: Beispiel 1.12

b)

$$\mathcal{H}^2_{lok} = \mathcal{M}^2_{lok} = \mathcal{M}_{lok}$$

und $\mathcal{M}_{lok}$ ist ein (reeller) Vektorraum (s. Satz 1.16).
(Zur Erinnerung: die obigen Klassen sind Klassen stetiger Prozesse.)

Aufgabe 8. (Augmentation) Zeigen Sie für die Augmentation $\mathbb{F}^*$ einer Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ und $Z \in \mathcal{L}^1$

$$E(Z|\mathcal{F}_t) = E(Z|\mathcal{F}_t^*)$$

für alle $t \geq 0$.