H. Luschgy SS 2014
Blatt 1

Stochastische Prozesse II

Übungen

Besprechungstermin: 30.4.14, 16.30 Uhr

Aufgabe 1. (Stoppzeiten)
σ, τ und τ_n seien $\mathbb{F}$-Stoppzeiten, wobei $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Zeigen Sie:

(a) $\mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau} = \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{F}_\tau$.

(b) $A \in \mathcal{F}_\sigma \Rightarrow A \cap \{\sigma \leq \tau\}, A \cap \{\sigma < \tau\} \in \mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}$.

(c) $\mathcal{F}_\sigma \subset \{F \in \mathcal{F}_\infty : F \cap \{\sigma < t\} \in \mathcal{F}_t \ \forall t \geq 0\}$.

(d) Für cad Filtrationen $\mathbb{F}$ gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\inf \tau_n} &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_{\tau_n}, \\ \mathcal{F}_\sigma &= \{F \in \mathcal{F}_\infty : F \cap \{\sigma < t\} \in \mathcal{F}_t \ \ \forall t \geq 0\} \end{aligned}$$

(s. Lemma 1.5)

Aufgabe 2. (Erste Eintrittszeit)
Sei $X = (X_t)_{t\geq 0}$ ein reeller $\mathbb{F}$-adaptierter Prozess mit stetigen Pfaden und für $B \subset \mathbb{R}$ sei

$$\tau_B = \inf\{t \geq 0 : X_t \in B\}$$

die Eintrittszeit von X in B. Zeigen Sie: Die Eintrittszeit in eine F_σ-Menge B, d.h. $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ mit abgeschlossenen B_n, ist eine $\mathbb{F}_+$-Stoppzeit.

Aufgabe 3. (Martingaltest für Supermartingale)
Sei $X = (X_t)_{t\in I}$ ein Supermartingal mit $I = \mathbb{R}_+$ oder $I = [0, T]$. (Nach SP I, Aufgabe 13 sind z.B. positive lokale Martingale schon Supermartingale.)
Zeigen Sie im Fall $I = \mathbb{R}_+$

$$X \text{ ist Martingal } \Leftrightarrow \ EX_t = EX_0 \ \ \forall t \geq 0$$

und im Fall $I = [0, T]$

$$X \text{ ist Martingal } \Leftrightarrow EX_T = EX_0.$$

Aufgabe 4. (Messbar adaptiert vs progressiv)
Seien $(\Omega, \mathcal{F}) = (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)), \mathcal{F}_t = \{A \subset \Omega : A \text{ oder } A^c \text{ ist abzählbar}\}$, $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ und $D = \{(t, t) : t \in \mathbb{R}_+\}$ die Diagonale in $\mathbb{R}_+ \times \Omega$. Zeigen Sie, dass der Prozess $X := 1_D$ $\mathbb{F}$-adaptiert und messbar, aber nicht $\mathbb{F}$-progressiv-messbar ist.
Hinweis: Für $t \geq 0$ ist das System

$$\{M \in \mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F} : \exists B \in \mathcal{B}([0, t]) \text{ mit } \{\omega \in \Omega : M_\omega \neq B\} \text{ abzählbar }\}$$

eine σ-Algebra über $[0, t] \times \Omega$, die $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$ enthält.