H. Luschgy

SS 2013
Blatt 6

Stabile Konvergenz von Zufallsvariablen

Übungen

Aufgabe 12
Sei $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine iid Folge reeller Zufallsvariablen mit $Z_1 \in \mathcal{L}^2(P), EZ_1 = 0$ und $\sigma^2 := \mathrm{Var}Z_1 > 0$.

Zeigen Sie

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \max_{0\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{j} Z_i \to \mu \text{ mischend,}$$

wobei

$$\frac{d\mu}{d\lambda}(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} 1_{\mathbb{R}_+}(t).$$

Hinweis: μ ist die Verteilung von $\max\limits_{t\in[0,1]} W_t$ für eine Brownsche Bewegung $(W_t)_{t\in[0,1]}$.

Aufgabe 13
Sei $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine iid Folge reeller Zufallsvariablen mit $Z_1 \in \mathcal{L}^2$, $EZ_1 = 0, \sigma^2 := \mathrm{Var}Z_1 > 0$.
Zeigen Sie

$$X_n := \frac{1}{\sigma^2 n^2} \sum_{j=2}^{n} \left(\sum_{i=1}^{j-1} Z_i \right) \to P^{\int_0^1 W_t^2 dt} \text{ mischend,}$$

wobei $(W_t)_{t\in[0,1]}$ eine BM bezeichnet, und (X_n) konvergiert nicht stochastisch.

Aufgabe 14 (Borel-Cantelli-Eigenschaft)
Seien $F_n \in \mathcal{F}$ und $\alpha \in (0,1)$ mit

$$\lim_{n\to\infty} P(F_n \cap G) = \alpha P(G) \text{ für alle } G \in \mathcal{F}.$$

Zeigen Sie

$$P\left(\liminf_{n\to\infty} F_n\right) = 0, \quad P\left(\limsup_{n\to\infty} F_n\right) = 1.$$

Hinweis: Aufgabe 8.

Aufgabe 15*
Sei $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stationär, ergodisch, reell und

$$X_n := \frac{1}{a_n} \left(\max_{1\leq i\leq n} Z_i - b_n \right) \xrightarrow{d} \nu$$

mit $a_n > 0, b_n \in \mathbb{R}$.

Zeigen Sie

$$X_n \to \nu \text{ mischend.}$$

(Im iid-Fall ist dies bekannt.)