H. Luschgy SS 2013

Blatt 5

Stabile Konvergenz von Zufallsvariablen

Übungen

Aufgabe 8

Seien $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ eine Unter-σ-Algebra, $F_n \in \mathcal{F}$, $\alpha : \Omega \to [0,1]$ $\mathcal{G}$-messbar und $K \in \mathcal{K}^1(\mathcal{G})$ mit $K(\omega, \cdot) = \alpha(\omega)\delta_1 + (1 - \alpha(\omega))\delta_0$.

Zeigen Sie, dass

$$1_{F_n} \longrightarrow K \;\; \mathcal{G} - \text{stabil}$$

genau dann gilt, wenn

$$\lim_{n\to\infty} P(F_n \cap G) = \int_G \alpha \, dP \quad \text{für alle } G \in \mathcal{G}.$$

Aufgabe 9

Seien $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ eine Unter-σ-Algebra, X_n $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$-wertige Zufallsvariable und $\sigma(X_n)$ und $\mathcal{G}$ seien für alle $n \in \mathbb{N}$ unabhängig.

Zeigen Sie, dass

(i) (X_n) konvergiert $\mathcal{G}$-stabil,

(ii) (X_n) konvergiert $\mathcal{G}$-mischend,

(iii) (X_n) konvergiert in Verteilung

äquivalent sind.

Aufgabe 10

Sei $X_n \to \nu$ mischend für ein $\nu \in M^1(\mathcal{X})$, das kein Dirac-Maß ist. Zeigen Sie, dass (X_n) nicht stochastisch konvergiert.

Aufgabe 11

Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine iid Folge reeller Zufallsvariablen mit stetiger Verteilung P^{X_1} und Y eine weitere reelle Zufallsvariable. Zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n \le Y) = \int P(X_1 \le y) dP^Y(y).$$