T. Kalmes
H. Luschgy WS 2007/08

Probeklausur am 20.12.2007

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Ein ungefälschter Würfel wird 3-mal geworfen. Geben Sie einen geeigneten Ergebnisraum Ω an, charakterisieren Sie die folgenden Ereignisse als Teilmengen von Ω und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit Ihres Eintretens.
a) Die Augensumme der ersten beiden Würfe ist größer oder gleich 6.

b) In jedem Wurf ist die jeweilige Augenzahl größer als 3, in mindestens einem größer als 4.

c) Das Produkt der Augenzahlen ist kleiner als 180.

Aufgabe 2 (1 + 3 Punkte)
Eine Algebra $\mathcal{A}$ über Ω wurde definiert durch die Axiome
1) $\Omega \in \mathcal{A}$; 2) $\forall A \in \mathcal{A} : A^c \in \mathcal{A}$; 3) $\forall A,\ B \in \mathcal{A} : A \cap B \in \mathcal{A}$.
i) In welchen Axiomen unterscheidet sich eine Algebra von einer σ-Algebra?
ii) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ genau dann eine Algebra über Ω ist, wenn gelten

a1) $\emptyset \in \mathcal{A}$

a2) $\forall n \in I\!N, A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A} : \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$

a3) $\forall A \in \mathcal{A} : A^c \in \mathcal{A}$

Aufgabe 3 (3+1 Punkte)
Es sei $\Omega \neq \emptyset$ und $\mathcal{E} = \{\{\omega\}; \omega \in \Omega\}$. Zeigen Sie, dass $\sigma(\mathcal{E}) = \{A \subseteq \Omega; A$ oder A^c abzählbar $\}$. Geben Sie außerdem eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, dass $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{P}(\Omega)$ und beweisen Sie Ihre Behauptung.

Aufgabe 4 (2 + 2 Punkte)
i) Es sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Meßraum und $A \subseteq \Omega$. Zeigen Sie, dass $1\!\!1_A : \Omega \to \{0, 1\}$, genau dann $(\mathcal{A}, \mathcal{P}(\{0, 1\}))$-messbar ist, wenn $A \in \mathcal{A}$.
ii) Für $x \in I\!R$ sei $[x] := \max\{n \in Z\!\!Z, n \leq x\}$. Überprüfen Sie, ob

$$f : I\!R \to Z\!\!Z, x \mapsto [x]$$

$(\mathcal{B}, \mathcal{P}(Z\!\!Z))$-messbar ist.

Aufgabe 5 (4 Punkte)
Es seien P_1, P_2 Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(I\!R, \mathcal{B})$ mit Verteilungsfunktionen F_1 bzw. F_2. Zeigen Sie, dass $P_1 = P_2$ genau dann gilt, wenn $F_1(x) = F_2(x)$ für alle $x \in I\!R$.