T. Dinev
H. Luschgy

SS 2013

Musterklausur zur Wahrscheinlichkeitstheorie

NAME	
VORNAME	
MATRIKEL - NR.	
STUDIENGANG	(Bsc oder Diplom)

Bearbeitungszeit: 105 min
Erreichbare Punktzahl: 24
Mindestpunktzahl: 10

Ergebnis:

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	$\sum$
Erreichbare Punktzahl	4	4	4	4	4	4	24
Erreichte Punktzahl							

Bitte bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem gesonderten Blatt !

Anzahl der abgegeben Blätter:

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller ZV mit $P^{X_n} = N(0, \sigma_n^2)$ und $\sigma_n^2 \to \infty$. Zeigen sie, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stochastisch unbeschränkt ist, d.h. $\lim_{n\to\infty} P(|X_n| \leq C) = 0 \; \forall C \in (0,\infty)$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei X eine Poi(λ)-verteilte ZV. Berechnen Sie Var$X$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine iid Folge reeller ZV und $t \in \mathbb{R}, |t| > 1$. Zeigen sie

$$t^{-n} X_n \to 0 \text{ f.s. } \Rightarrow E \log^+ |X_1| < \infty.$$

Hinweis: Borel-Cantelli Lemma.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge identisch verteilter ZV mit $X_1 \in \mathcal{L}^p(P), 0 < p < \infty$.
Zeigen Sie

$$n^{-1/p} \max_{1\leq i\leq n} |X_i| \xrightarrow{P} 0, n \to \infty$$

(Stochastische Konvergenz).

Aufgabe 5 (4 Punkte)
Seien $X \in \mathcal{L}^1(P)$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex (und daher stetig) mit $f(X) \in \mathcal{L}^1(P)$. Zeigen Sie $f(EX) \leq Ef(X)$ mit Hilfe des SLLN von Kolmogogrov.

Aufgabe 6 (4 Punkte)
Für $n \in \mathbb{N}$, sei X_n eine $G(p_n)$-verteilte ZV mit $0 < p_n < 1$. Zeigen Sie

$$p_n \to 0 \Rightarrow p_n X_n \xrightarrow{d} E(1), n \to \infty.$$

Hinweis: Fourier-Transformierte von E(1)

$$\varphi_{E(1)}(t) = \frac{1}{1-it}, t \in \mathbb{R}$$

und

$$\sum_{k=1}^{\infty} z^k = \frac{z}{1-z}, z \in \mathbb{C}, |z| < 1.$$