Maß- und Integrationstheorie
Übungsblatt 9
WS 2009/10

J. Dimitriadis, H. Luschgy, L. Mattner

Abgabetermin: Donnerstag, 14.01.2010, 12 Uhr, Kasten 22

34 Charakterisierung der Konvexität (3 Punkte)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $\varphi : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. φ ist konvex.
2. Für $x, y, t \in I$ mit $x < t < y$ gilt
$$\varphi(t) \leq \varphi(x) + \frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{y - x}(t - x)$$
3. Für $x, y, t \in I$ mit $x < t < y$ gilt
$$\frac{\varphi(t) - \varphi(x)}{t - x} \leq \frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{y - x}$$
4. Für $x, y, t \in I$ mit $x < t < y$ gilt
$$\frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{y - x} \leq \frac{\varphi(y) - \varphi(t)}{y - t}$$
5. Für $x, y, t \in I$ mit $x < t < y$ gilt
$$\frac{\varphi(t) - \varphi(x)}{t - x} \leq \frac{\varphi(y) - \varphi(t)}{y - t}$$

Damit folgt, daß die Funktion φ auf $\mathring{I}$ rechtsstetig ist, falls sie konvex ist, denn für $x_0 \in \mathring{I}$ und $s, t \in \mathring{I}$ mit $s < x_0 < t$ (welche existieren, da $\mathring{I}$ offen) gilt dann für jedes $x \in \,]x_0, t[$

$$\frac{\varphi(s) - \varphi(x_0)}{s - x_0} \leq \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{\varphi(t) - \varphi(x_0)}{t - x_0}$$

also

$$\frac{\varphi(s)-\varphi(x_0)}{s-x_0}(x-x_0) \le \varphi(x)-\varphi(x_0) \le \frac{\varphi(t)-\varphi(x_0)}{t-x_0}(x-x_0)$$

Analog folgt, daß φ auf $\mathring{I}$ linksstetig ist, falls sie konvex ist. Also ist jede konvexe Funktion im Inneren ihres Definitionsbereiches stetig.
Ihre Aufgabe: Zeigen Sie exemplarisch für eine der Aussagen 1,3,4 oder 5 die Äquivalenz zu Aussage 2.

35 Stützgeraden an eine konvexe Funktion (4 Punkte)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $\varphi : I \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion.
Zeigen Sie, daß für jedes $x_0 \in \mathring{I}$ die linksseitige Ableitung im Punkt x_0

$$m := \sup\left\{\frac{\varphi(x_0)-\varphi(x)}{x_0-x} : x \in I, x < x_0\right\}$$

endlich ist und damit

$$\varphi(x) \ge \varphi(x_0) + m(x-x_0) \qquad \text{für } x \in I$$

gilt.

36 (2 Punkte)

Zeigen Sie für binomialverteilte Zufallsgrößen $X \sim \mathrm{B}(n,p)$:

$$\mathbb{E}\frac{1}{\sqrt{1+X}} \ge \frac{1}{\sqrt{1+np}}$$

37 Abschätzung von p-Normen auf endlichem Maßraum (4 Punkte)

Es seien $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit $\mu(\mathcal{X}) < \infty$ und $p_1, p_2 \in \,]0,\infty[$ mit $p_1 < p_2$.
Zeigen Sie: Es gilt für jede messbare Funktion $f : \mathcal{X} \to [-\infty, \infty]$

$$\|f\|_{p_1} \le \mu(\Omega)^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}} \cdot \|f\|_{p_2}$$

Hinweis: Wenden Sie die Jensen-Ungleichung auf den Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \frac{1}{\mu(\mathcal{X})}\mu)$ an.