J. Dimitriadis
H. Luschgy

WS 2009/10
Blatt 8

Maß- und Integrationstheorie

Übungen

Abgabetermin: 7.01.2010, 12.00 Uhr, Übungskasten 22

Aufgabe 30 (Bestimmende Klassen/5 Bonuspunkte)
Zeigen Sie: $\{f : [0,1] \to I\!R, x \mapsto x^n : n \in I\!N\}$ ist eine bestimmende Klasse für $M^1([0,1]) := \{P : P$ Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{B}([0,1])\}$, d.h. aus $P_1, P_2 \in \mathcal{M}^1([0,1])$ und

$$\int x^n dP_1(x) = \int x^n dP_2(x) \quad \text{für alle} \quad n \in I\!N \text{ folgt } P_1 = P_2.$$

Hinweis: Man verwende den Approximationssatz von Weierstrass (jede auf $[0,1]$ stetige Funktion läßt sich gleichmäßig durch Polynome approximieren). Dann approximiere man $1_{[0,a]}, a \in [0,1]$ durch stetige Funktionen.

Aufgabe 31 (4 Punkte)
Zeigen Sie für $f : I\!R \to I\!R$,

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} 1_{[2^{-n}, 2^{-n+1})}(x)$$

f ist λ-integrierbar, aber $f \log^+(f)$ ist nicht λ-integrierbar. (Dabei bezeichnet $\log^+$ wie immer den Positivteil der Funktion log.)

Aufgabe 32 (4 Punkte)
Es seien $f : Z\!\!\!Z \to I\!R, f \geq 0$ und $h : I\!R \to I\!R, h(x) := f(\min\{n \in Z\!\!\!Z : n > x\})$ (siehe Aufgabe 19). Zeigen Sie:

$$\int h d\lambda = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n).$$

Aufgabe 33 (4 Punkte)
Zeigen Sie für $I_n(\alpha) := \int_0^n (1 - \frac{x}{n})^n e^{\alpha} d\lambda(x), \alpha \in I\!R, n \in I\!N$:

$$\lim_{n \to \infty} I_n(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{(\alpha - 1)x} d\lambda(x)$$

Hinweis: $I_n(\alpha) = \int_0^{\infty} f_n(x) e^{\alpha x} d\lambda(x)$ mit $f_n(x) = 1_{[0,n]}(x)(1 - \frac{x}{n})^n, x \geq 0$.