J. Dimitriadis
H. Luschgy

WS 2009/10
Blatt 7

Maß- und Integrationstheorie

Übungen

Abgabetermin: 17.12.2009, 12.00 Uhr, Übungskasten 22

Aufgabe 26 (Faktorisierungssatz 5.17/4 Punkte)
Seien $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ ein messbarer Raum, $g : \Omega_1, \to \Omega_2, f : \Omega_1 \to \overline{\mathbb{R}}$. Zeigen Sie:
f ist $g^{-1}(\mathcal{A}_2)$-messbar $\Leftrightarrow$ es existiert eine $\mathcal{A}_2$-messbare Funktion $h : \Omega_2 \to \overline{\mathbb{R}}$ mit $f = h \circ g$.

Hinweis: Verwenden Sie Satz 5.16 (Standardschluss) der Vorlesung.

Aufgabe 27 (Projektiver Limes, 5.18 / 3+3 Bonuspunkte)
Seien $\Omega = (0, 1], \Gamma = \mathbb{N}, \Omega_n = \mathbb{R}^n, \mathcal{A}_n = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$,

$$f_n : \Omega \to \Omega_n, f_n(\omega) := (1_{(0,1]}(\omega), \ldots, 1_{(0,\frac{1}{n}]}(\omega))$$

und $P_n = \delta_{\mathbf{1}_n}$ (Dirac-Maß), wobei $\mathbf{1}_n := (1, \ldots, 1)$.

Zeigen Sie:

a) $(P_n, f_n)_{n\in\Gamma}$ ist konsistent.

b) Der projektive Limes von $(P_n, f_n)_{n\in\Gamma}$ existiert nicht.

Aufgabe 28 (5 Punkte)
Beweisen Sie Lemma 6.1 der Vorlesung über die Integration von positiven Elementarfunktionen.

Aufgabe 29 (3 Punkte)
Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := \begin{cases} \frac{1}{n} & , \quad x \in [2n, 2n+1) \\ -\frac{1}{n} & , \quad x \in [2n+1, 2n+2), n \in \mathbb{N} \\ 0 & , \quad x < 2 \end{cases}$$

nicht λ-quasiintegrierbar ist. (λ bezeichnet dabei das 1-dimensionale Lebesgue-Maß.)