J. Dimitriadis WS 2009/10
H. Luschgy Blatt 6

Maß- und Integrationstheorie

Übungen

Abgabetermin: 10.12.2009, 12.00 Uhr, Übungskasten 22

Aufgabe 22 (4 Punkte)
Seien $P = U(0,1)$, die uniforme Verteilung auf [0,1], und

$$f : [0,1] \to [0,1], f(x) := \begin{cases} 2x & , \quad 0 \leq x \leq 1/2 \\ 2-2x & , \quad 1/2 < x \leq 1. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f $(\mathcal{B}([0,1]), \mathcal{B}([0,1]))$-messbar ist und $P^f = P$ gilt.
Hinweis: Beispiel 4.6.

Aufgabe 23 (3+3 Punkte)
a) Sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear mit $\det T = 0$. Zeigen Sie, dass $T(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)_{\lambda^n}$ und

$$\overline{\lambda^n}(T(A)) = 0$$

für alle $A \subset \mathbb{R}^n$. Dabei ist $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)_{\lambda^n}, \overline{\lambda^n})$ die Vervollständigung von $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda^n)$.
b) Für $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}^n$ sei

$$A := \{\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i : (\alpha_1, \ldots, \alpha) \in [0,1]^n\}$$

das von den Vektoren $y_1, \ldots, y_n$ aufgespannte Parallelotop. Zeigen Sie $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ und

$$\lambda^n(A) = |\det\,(y_1, \ldots, y_n)|.$$

Aufgabe 24 (3 Punkte)
Es seien $f, g \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$. Zeigen Sie:

$$\frac{f}{g} \in \mathcal{L}(\mathcal{A}),$$

wobei f/g auf $\{g = 0\}$ geeignet zu definieren ist.

Aufgabe 25 (Median/3+2 Punkte)
Seien $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{A}$-meßbare Zufallsvariable.

a)Zeigen Sie, dass $\mathrm{Med}(X) := \{m \in \mathbb{R} : P^X([m,\infty)) \geq \frac{1}{2}, P^X((-\infty, m]) \geq \frac{1}{2}\}$ ein kompaktes, nichtleeres Intervall ist. (Jedes $m \in \mathrm{Med}(X)$ heißt Median von X bzw. P^X.)

b) Berechnen Sie $\mathrm{Med}(X)$ für eine $W(a,b)$-verteilte Zufallsvariable (s. Aufgabe 16).