J. Dimitriadis
H. Luschgy

WS 2009/10
Blatt 5

Maß- und Integrationstheorie

Übungen

Abgabetermin: 03.12.2009, 12.00 Uhr, Übungskasten 22

Aufgabe 18 (4 Punkte)
$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ sei ein σ-endlicher Maßraum mit $\{\omega\} \in \mathcal{A}$ für alle $\omega \in \Omega$. Zeigen Sie, dass es eine eindeutige Zerlegung

$$\mu = \mu_1 + \mu_2$$

von μ gibt mit einem diskreten Maß μ_1 auf A (d.h. $\mu_1(\Omega_0^c) = 0$ für eine abzählbare Teilmenge $\Omega_0 \subset \Omega$) und einem stetigen Maß μ_2 auf $\mathcal{A}$ (d.h. $\mu_2(\{\omega\}) = 0$ für alle $\omega \in \Omega$).
Hinweis: Lemma 4.8

Aufgabe 19 (3 Punkte)
Es sei $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(x) := f(\min\{n \in \mathbb{Z} : n > x\})$$

Borel-messbar ist.

Aufgabe 20 (3 Punkte)
Es seien $(\Omega, \mathcal{A})$ und $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ messbare Räume, $f : \Omega \to \mathcal{X}$ eine Abbildung mit den Eigenschaften

i) $f(\Omega)$ ist abzählbar

ii) $\{\{x\} : x \in f(\Omega)\} \subset \mathcal{B}$.

Zeigen Sie, das f genau dann $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-messbar ist, wenn $f^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{A}$ für alle $x \in \mathcal{X}$ gilt.

Aufgabe 21 (4 Punkte)
Beweisen Sie Satz 5.8 b), c) der Vorlesung über die σ-Algebra $\sigma(f_i, i \in I)$.