J. Dimitriadis
H. Luschgy

WS 2009/10
Blatt 2

Maß- und Integrationstheorie

Übungen

Abgabetermin: 12.11.2009, 12.00 Uhr, Übungskasten 22

Aufgabe 5 σ-Algebra / 5 Bonuspunkte)
Es sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über Ω mit unendlich vielen Elementen. Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ nicht abzählbar ist.

Hinweis: Nehmen Sie das Gegenteil an und folgern Sie, dass für $\omega \in \Omega$ durch $B_\omega := \bigcap_{\omega \in A \in \mathcal{A}} A$ Atome von $\mathcal{A}$ definiert sind. Eine Menge $B \in \mathcal{A}, B \neq \emptyset$ heißt dabei Atom, falls für $A \in \mathcal{A}$ mit $A \subset B$ gilt $A = \emptyset$ oder $A = B$. Atome sind entweder gleich oder disjunkt. Zeigen Sie außerdem, dass $\{B_\omega : \omega \in \Omega\}$ unendlich ist.

Aufgabe 6 (Borelsche σ-Algebra / 3+3 Punkte)
Sei (Ω, d) ein metrischer Raum.
a) Der metrische Raum (Ω, d) heißt separabel, falls es eine abzählbare Teilmenge $\Omega_0 \subset \Omega$ gibt, die dicht ist, das heißt ihr topologischer Abschluss ist Ω. Zeigen Sie, dass in diesem Fall

$$\mathcal{B}(\Omega) = \sigma(\{K_r(x) : x \in \Omega, r > 0\}),$$

wobei $K_r(x) := \{y \in \Omega : d(x, y) < r\}$ die offene Kugel um x mit Radius r bezeichnet. Diese Beschreibung von $\mathcal{B}(\Omega)$ bleibt richtig, wenn $K_r(x)$ die abgeschlossene Kugel $\{y \in \Omega : d(x, y) \leq r\}$ bezeichnet. (Der topologische Abschluss der offenen Kugel ist übrigens nicht immer die abgeschlossene Kugel.)
b) Sei $\Omega = \mathbb{R}$ und $d(x, y) = 1$ für $x \neq y, d(x, x) = 0$ die diskrete Metrik. Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} \sigma(\{K_r(x) : x \in \Omega, r > 0\}) &= \{A \subset \Omega : A \text{ oder } A^c \text{ ist abzählbar}\} \\ &\neq \mathcal{P}(\Omega) = \mathcal{B}(\Omega, d). \end{aligned}$$

Aufgabe 7 (4 Punkte)
Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und (A_n) eine Folge aus $\mathcal{A}$. Zeigen Sie:

$$\mu(\liminf_{n\to\infty} A_n) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu(A_n),$$

$$\mu(\limsup_{n\to\infty} A_n) \geq \limsup_{n\to\infty} \mu(A_n), \text{ falls } \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) < \infty,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty \Rightarrow \mu(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0 \text{ (Borel-Cantelli-Lemma, 1. Teil).}$$

Aufgabe 8 (4 Punkte)
Es seien

$$\Omega = \mathbb{Q}, \mathcal{A} = \{(a, b] \cap \mathbb{Q} : a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\},$$

$$\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+, \mu((a, b] \cap \mathbb{Q}) = b - a.$$

Beweisen Sie: $\mathcal{A}$ ist Semiring über Ω und μ ist endlich additiv (und endlich), von unten und oben stetig, aber nicht σ-additiv.
Hinweis: Dieses Beispiel illustriert, dass Satz 2.4 nicht für Semiringe gilt.