J. Dimitriadis
H. Luschgy

WS 2009/10
Blatt 14

Maß- und Integrationstheorie

Übungen

(Keine Abgabe, Besprechung Anfang SS)

Aufgabe 55

Sei $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x \leq 1\}$, und $Q = U(D)$ (die uniforme Verteilung auf dem Dreieck $D \subset [0,1]^2$), μ die x-Randverteilung von Q und $K : [0,1] \times \mathcal{B}([0,1]) \to [0,1]$,

$$K(x,B) = U([0,x])(B).$$

Zeigen Sie: K ist ein Markov-Kern,

$$\frac{d\mu}{d\lambda}(x) = 2x1_{[0,1]}(x)$$

und

$$\mu \otimes K = Q.$$

Aufgabe 56

Sei $\|\cdot\|$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^2$. Im hexagonalen Gitter

$$\Lambda = \mathbb{Z}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \mathbb{Z}\begin{pmatrix}1/2\\\sqrt{3}/2\end{pmatrix}$$

ist die Voronoi-Zelle A um 0

$$\begin{aligned} A &:= \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq \|x-a\| \text{ für alle } a \in \Lambda\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| \leq 1/2, |x_1| + \sqrt{3}|x_2| \leq 1\} \end{aligned}$$

ein reguläres Sechseck. Berechnen Sie das normalisierte 2. Moment von A

$$\frac{\int \|x\|^2 dU(A)(x)}{\lambda^2(A)} = \frac{\int_A \|x\|^2 d\lambda^2(x)}{(\lambda^2(A))^2}$$

(Lösung: $\frac{5}{18\sqrt{3}} = 0.1603...$)

Aufgabe 57

(a) Zeigen Sie

$$\int_0^\infty \frac{e^{-2t} - e^{-t}}{t} dt = -\log(2).$$

Hinweis: Man untersuche

$$f(x,t) := (e^{-xt} - e^{-t})/t \text{ und}$$

$$F(x) := \int_0^\infty f(x,t)dt \text{ für } x,t > 0.$$

b) Die Funktion $f : \mathbb{R}_+ \times [0,1] \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x,y) := 2e^{-2xy} - e^{-xy}.$$

Zeigen Sie für die iterierten Integrale:

$$\int_0^1 (\int_0^\infty f(x,y)dx)dy = 0$$

und

$$\int_0^\infty (\int_0^1 f(x,y)dy)dx = \log 2 (\neq 0).$$

Damit ist f also nicht $\lambda_{\mathbb{R}_+} \otimes \lambda_{[0,1]}$-quasiintegrierbar.

Aufgabe 58

Zeigen Sie:

i) $g : (0,\infty) \times (0,1) \to (0,\infty)^2$, $g(u,v) := \binom{u(1-v)}{uv}$ ist ein C^1-Diffeomorphismus mit

$$g^{-1}(x,y) = \begin{pmatrix} x+y \\ \frac{x}{x+y} \end{pmatrix}.$$

ii) Die Funktion $f : (0,\infty)^2 \to \overline{\mathbb{R}}$ sei Borel-messbar. Genau dann ist f über $(0,\infty)^2$ Lebesgue-integrierbar, wenn $(u,v) \mapsto f(g(u,v))u$ über $(0,\infty) \times (0,1)$ integrierbar ist. Ferner gilt dann

$$\int_{0,\infty)} \int_{(0,\infty)} f(x,y)dxdy = \int_{(0,\infty)} \left(\int_{(0,1)} f(u(1-v), uv)udv \right) du.$$

ii) Die **Beta-Funktion** oder das **1. Eulersche Integral** ist definiert durch

$$B(\alpha,\beta) := \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt, \alpha,\beta > 0.$$

Es gilt

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \alpha,\beta > 0.$$

Aufgabe 59

Seien (Ω_1, d_1) und (Ω_2, d_2) metrische Räume. Man definiere die Produktmetrik durch

$$d(x,y) := d_1(x_1,y_1) \vee d_2(x_2,y_2),$$

$x,y \in \Omega_1 \times \Omega_2$. Zeigen Sie für die Borel-σ-Algebren

$$\mathcal{B}(\Omega_1) \otimes \mathcal{B}(\Omega_2) \subset \mathcal{B}(\Omega_1 \times \Omega_2)$$

und falls Ω_1 und Ω_2 separabel sind,

$$\mathcal{B}(\Omega_1) \otimes \mathcal{B}(\Omega_2) = \mathcal{B}(\Omega_1 \times \Omega_2).$$

Hinweis: Aufgabe 6.

Am Freitag den 12.02.2010 wird von 10.15 bis 13.00 die **Klausur zur Maß- und Integrationstheorie** im HS 6 geschrieben. Bringen Sie bitte Ihren Studentenausweis mit. Es sind während der Klausur keinerlei Hilfsmittel erlaubt. Bringen Sie aber bitte Kugelschreiber oder Füller und unbeschriebenes DIN A4 Papier mit. (Die Klausur kann nicht mit Bleistift geschrieben werden.) Wer die Klausur nicht besteht, kann an einer Nachklausur am 16.4.2010 teilnehmen.