J. Dimitriadis
H. Luschgy

WS 2009/10
Blatt 13

Maß- und Integrationstheorie

Übungen

Abgabetermin: 11.02.2010, 12.00 Uhr, Übungskasten 22

Aufgabe 50 (4 Bonuspunkte)
Zeigen Sie, dass $\{x \mapsto x^n : x \in I\!R, n \in I\!N\}$ keine bestimmende Klasse für

$$M^1(I\!R) := \{P : P \text{ W-Maß auf } \mathcal{B}(I\!R)\} \quad \text{ist (vgl. A. 30).}$$

Hinweis (Beispiel von C.C. Heyde): Sei f_0 die λ-Dichte der log-Normalverteilung, d.h. der Verteilung von $N(0,1)^g$ mit $g(x) = \exp(x)$, und $f_a(x) = f_0(x)[1+a\sin(2\pi\log x)]1_{(0,\infty)}(x)$, $-1 \leq a \leq 1$. Dann gilt $P_a := f_a\lambda \in M^1(I\!R), \int x^n dP_a(x) = \int x^n dP_b(x)$ für alle $n \in I\!N, -1 \leq a, b \leq 1$, aber es ist $P_a \neq P_b$ für a$\neq b$.

Aufgabe 51 (Box-Muller „Algorithmus“/4 Punkte)
Sei $Q = f\lambda^2$ ein W-Maß auf $\mathcal{B}(I\!R^2)$ mit $f = 1_{(0,1)^2}$ und $g = (g_1, g_2) : (0,1)^2 \to I\!R^2$,

$$g_1(x) = \sqrt{-2\log x_1}\ \cos(2\pi x_2),$$

$$g_2(x) = \sqrt{-2\log x_1}\ \sin(2\pi x_2).$$

Zeigen Sie: $Q^g = h\lambda^2$ mit

$$h(y) = \frac{1}{2\pi}\exp(-\frac{y_1^2+y_2^2}{2}), y \in I\!R^2$$

(Q^g ist eine 2-dimensionale Standardnormalverteilung).

Aufgabe 52 (Cauchy-Verteilung/ 2+2 Punkte)
a) Sei $Q = f\lambda$ mit $f = \frac{1}{\pi}1_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}$ und $g : I\!R \to I\!R$,

$$g(x) = \begin{cases} \tan(x), & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(Q ist also die uniforme Verteilung auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.) Zeigen Sie: $Q^g = h\lambda$ mit

$$h(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}, y \in I\!R.$$

Q^g ist die Cauchy-Verteilung $C(1)$.

b) Sei X eine $C(1)$-verteilte Zufallsvariable. Zeigen Sie:
$E \mid X \mid^p < \infty, 0 < p < 1$, aber EX existiert nicht.

Aufgabe 53 (4 Punkte)
Zeigen Sie für die Fourier-Transformierte $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$F(x) := \int \cos(tx) dN(0,1)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos(tx) e^{-t^2/2} dt$$

der $N(0,1)$-Verteilung, dass $F(x) = e^{-x^2/2}$.
Hinweis: Differenzieren Sie $F(x)e^{x^2/2}$.

Aufgabe 54 (3 Punkte)
Seien $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und $g : G \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, injektiv mit $\det g'(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. „Berechnen“ Sie $\lambda^n(g(G))$.