J. Dimitriadis
H. Luschgy

WS 2009/10
Blatt 12

Maß- und Integrationstheorie

Übungen

Abgabetermin: 04.02.2010, 12.00 Uhr, Übungskasten 22

Aufgabe 46 (4 Punkte)
Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und ν ein endliches Maß auf $\mathcal{A}$. Zeigen Sie: $\nu << \mu$ gilt genau dann, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, mit

$$\mu(A) \leq \delta \Rightarrow \nu(A) \leq \varepsilon, A \in \mathcal{A}.$$

Hinweis: Man verwende Aufgabe 7.

Aufgabe 47 (2+2 Punkte)
Seien μ, ν, ϱ σ-endliche Maße auf einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ mit

$$\nu << \mu \quad \text{und} \quad \mu << \varrho.$$

Zeigen Sie:
a) $\nu << \varrho$,
b) $\frac{d\nu}{d\varrho} = \frac{d\nu}{d\mu} \cdot \frac{d\mu}{d\varrho} \quad \varrho$-f.s.

Aufgabe 48 (Haar-Maß/2+3 Punkte)
Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $(G, \cdot)$ eine Gruppe und die Gruppenoperation

$$\varphi : G \times G \to G, \varphi(x, y) := x \cdot y$$

sei stetig partiell differenzierbar. Ferner seien für die Linkstranslationen

$$L(a) : G \to G, L(a)(x) := a \cdot x$$

die Abbildungen

$$S(a) : G \to \mathbb{R}_+, S(a)(x) := |\det L(a)'(x)|$$

für alle $a \in G$ konstant und nicht Null. Zeigen Sie:
a) S ist stetig und $S(a \cdot b) = S(a)S(b)$ für alle $a, b \in G$.
b)

$$\mu := \frac{1}{S}\lambda^n_G$$

ist ein linkes Haar-Maß auf $\mathcal{B}(G)$, das heißt

$$\mu^{L(a)} = \mu$$

für alle $a \in G$.

Aufgabe 49 (2+2+2 Punkte)
a) Die offene Menge $G = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ mit der Operation

$$x \cdot y = (x_1 y_1, x_2 + y_2)$$

ist eine (abelsche) Gruppe. Zeigen sie, dass

$$\mu = \frac{1}{S} \lambda_G^2 \text{ mit } S(x) = |x_1|$$

ein linkes Haar-Maß auf $\mathcal{B}(G)$ ist.
b) Die Menge G aus a) ist auch mit der Operation

$$x \cdot y = (x_1 y_1, x_1 y_2 + x_2)$$

eine Gruppe. Zeigen Sie, dass

$$\mu = \frac{1}{S} \lambda_G^2 \text{ mit } S(x) = x_1^2$$

ein linkes Haar-Maß auf $\mathcal{B}(G)$ ist.
c) Die offene Menge $G = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ ist mit der Operation

$$x \cdot y = (x_1 y_1 - x_2 y_2, x_2 y_1 + x_1 y_2)$$

eine Gruppe. Zeigen Sie, dass

$$\mu = \frac{1}{S} \lambda^2 \text{ mit } S(x) = x_1^2 + x_2^2$$

ein linkes Haar-Maß auf $\mathcal{B}(G)$ ist.
Hinweis: Aufgabe 48