Maß- und Integrationstheorie
Übungsblatt 10
WS 2009/10

J. Dimitriadis, H. Luschgy, L. Mattner

Abgabetermin: Donnerstag, 21.01.2010, 12 Uhr, Kasten 22

38 Eine Darstellung der Gammafunktion (4 Punkte)

Zeigen Sie für $x > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\, \mathbf{1}_{]0,n[}(t)\, \mathrm{d}t = \Gamma(x)$$

Hinweis: Verwenden Sie eine der Aussagen aus Aufgabe 34 für die konvexe Funktion $\phi := -\log$ um zu zeigen, daß die Folge der Integranden punktweise wachsend ist. Dann wenden Sie den Satz von der monotonen Konvergenz an.

39 Bildmaßbildung und Maße mit Dichten (3 Punkte)

Sei $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $(\mathcal{Y}, \mathcal{B})$ ein messbarer Raum, sowie $S : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ und $f : \mathcal{Y} \to [0, \infty]$ messbare Funktionen. Dann hat das Bildmaß von $(f \circ S)\mu$ unter S die μ^S-Dichte f:

$$((f \circ S)\mu)^S = f\mu^S$$

40 Hölder-Ungleichung für $0 < p < 1$ (4 Punkte)

Es seien $0 < p < 1$ und $q \in \mathbb{R}$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Sei $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f, g : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar so, daß $\{g = 0\} \setminus \{f = 0\}$ eine μ-Nullmenge ist. Dann gilt

$$\int_{\mathcal{X}} |fg|\, \mathrm{d}\mu \geq \left(\int_{\mathcal{X}} |f|^p\, \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathcal{X}} |g|^q\, \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

falls $\int_{\mathcal{X}} |g|^q\, \mathrm{d}\mu < \infty$

Hinweis: Wenden Sie die Hölder-Ungleichung auf das Integral $\int_{\mathcal{X}} f^p\, \mathrm{d}\mu = \int_{\mathcal{X}} (fg)^p \cdot g^{-p}\, \mathrm{d}\mu$ und den Exponenten $p' = \frac{1}{p}$ an.

41 (2 Punkte)

Finden Sie Konstanten $\alpha, \beta \in \,]0, \infty[$ derart, dass

$$\mathbb{E}X^2 \leq \big(\mathbb{E}|X|\big)^{\alpha} \cdot \big(\mathbb{E}X^4\big)^{\beta}$$

für jede reellwertige Zufallsgröße X auf einem Wahrscheinlichkeitsraum gilt.