T. Kalmes
H. Luschgy WS 2007/08

Klausur am 06.02.2008

Aufgabe 1 (2+2 Punkte)
i) Bei einem Experiment zur Lernfähigkeit von Affen erhält ein Affe sechs Bauklötze, je zwei mit den Buchstaben 'A' und 'N' und je einen mit 'B' und 'E'. Ordnet der Affe die Klötze so an, dass sich das Wort 'BANANE' ergibt, erhält er als Belohnung eine Banane. Wie hoch ist bei zufälliger Anordnung der Bauklötze die Wahrscheinlichkeit, dass der Affe eine Banane bekommt? Geben Sie dazu einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum an, beschreiben Sie das interessierende Ereignis und berechnen Sie seine Wahrscheinlichkeit.

ii) In einem zweiten Experiment sitzt der Affe vor einer Schreibmaschine mit 26 Tasten (mit den Buchstaben 'a', 'b', ..., 'z') und tippt 6 Buchstaben. Auch hier erhält er eine Banane, falls er das Wort 'banane' schreibt.
Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass er eine Banane bekommt, wenn er zufällig in die Tasten haut? Geben Sie auch hier einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum an, beschreiben Sie das interessierende Ereignis und berechnen Sie seine Wahrscheinlichkeit.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Es sei X eine Poisson-verteilte Zufallsvariable zum Parameter λ, d.h. $P(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ für $k \in \mathbb{N}_0$. Berechnen Sie EX und EX^2.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Es sei $\Omega \neq \emptyset$ und $\mathcal{E} = \{\{\omega\}; \omega \in \Omega\}$. Zeigen Sie, dass $\sigma(\mathcal{E}) = \{A \subseteq \Omega; A$ oder A^c abzählbar $\}$.

Aufgabe 4 (1 + 3 Punkte)
Es seien P_1 und P_2 Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega, \mathcal{A})$.
i) Zeigen Sie, dass aus $\forall A \in \mathcal{A} : P_1(A) \geq P_2(A)$ schon $P_1 = P_2$ folgt.
ii) Es sei $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ eine Algebra mit $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{F})$. Zeigen Sie, dass aus $\forall A \in \mathcal{F} : P_1(A) \geq P_2(A)$ schon $P_1(A) = P_2(A)$ folgt.

Aufgabe 5 (4 Punkte)
Auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ sei das Wahrscheinlichkeitsmaß

$$P(A) := \frac{1}{2^5} \sum_{k \in \{0,1,\dots,5\} \cap A} \binom{5}{k}$$

gegeben. Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \exp(x)$ P-integrierbar ist und berechnen Sie $\int_{[0,1]} f dP$ und $\int_{(0,1)} f dP$.

Aufgabe 6 (4 Punkte)
Es sei $f : [0,1] \to [0,1], x \mapsto 2x\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2})}(x) + (2x-1)\mathbb{1}_{[\frac{1}{2},1]}(x)$. Ferner bezeichne λ das Lebesguemaß auf $([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$. Zeigen Sie, dass f $(\mathcal{B}([0,1]), \mathcal{B}([0,1]))$-meßbar ist und dass $\lambda = \lambda^f$ gilt.

Aufgabe 7 (1 + 3 Punkte)
i) Was muss eine Funktion $F : I\!R \to I\!R$ erfüllen, damit durch $\lambda_F((a,b]) := F(b) - F(a)$ ein eindeutig bestimmtes Maß λ_F auf $(I\!R, \mathcal{B})$ definiert ist?
ii) Es sei

$$F : I\!R \to I\!R, x \mapsto \frac{x+1}{2}\mathbb{1}_{(-1,0)}(x) + \frac{2x+3}{4}\mathbb{1}_{[0,1)}(x) + 2\mathbb{1}_{[1,\infty)}.$$

Beschreiben das zugehörige Maß λ_F auf $(I\!R, \mathcal{B})$, indem Sie es darstellen als Summe $\lambda_F = \mu_1 + \mu_2$ eines diskreten Wahrscheinlichkeitsmaßes μ_1 und eines stetigen Maßes μ_2 (d.h. $\mu_2(\{x\}) = 0$ für alle $x \in I\!R$).
Um welches Maß handelt es sich bei μ_1?

Aufgabe 8 (2 + 2 Punkte)
Es bezeichne λ das Lebsguemaß auf $(I\!R, \mathcal{B})$. Überprüfen Sie für die Folgen von Funktionen $(f_n)_{n\in N}$, ob $f_n(\mathcal{B},\mathcal{B})$ meßbar ist, ob $f_n\lambda$-integrierbar ist, ob $(f_n)_{n\in N}\lambda$-f.s. konvergiert, überprüfen Sie ferner, ob $(f_n)_{n\in N}$ die Voraussetzungen des Satzes von der monotonen Konvergenz und die Voraussetzungen des Satzes von der beschränkten Konvergenz erfüllt und berechnen Sie, falls existent, $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n d\lambda$ und $\int \lim\limits_{n\to\infty} f_n d\lambda$

i) $f_n := \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\mathbb{1}_{[k,k+1)}$ ii) $f_n := \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2^k}\mathbb{1}_{[k,k+1)}$

Aufgabe 9 (2+2 Punkte)
i) Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Welche der folgenden Eigenschaften hat P notwendigerweise?

☐ P ist stetig in $\emptyset$

☐ P ist stetig von oben

☐ $\forall A_n \in \mathcal{A}, n \in I\!N : P(\limsup\limits_{n\to\infty} A_n) \geq \limsup\limits_{n\to\infty} P(A_n)$

☐ $\forall p \in [0,1]\ \exists A \in \mathcal{A} : P(A) = p.$

ii) Es sei $f : I\!R \to I\!R$ eine Funktion. Welche der folgenden Eigenschaften ist hinreichend für die Borel-Meßbarkeit von f?

☐ f ist monoton

☐ f ist beschränkt

☐ $f^{-1}(K)$ ist kompakt für alle kompakten Teilmengen $K \subset I\!R$.

☐ f ist stetig.