

Vorlesung

Wahrscheinlichkeitstheorie I

I Diskrete Verteilungen

1 Grundbegriffe der Kombinatorik

Permutationen mit Wiederholung (Variationen), Permutationen ohne Wiederholung, Kombinationen mit/ohne Wiederholung, Urnenmodell, Fußball-Toto, Zahlenlotto, Stirlingsche Formel.

2 Laplace-Verteilung

Diskrete Gleichverteilung, Laplace-Modell, Ergebnisraum, Ereignisse, Ergebnisse, Mengenoperationen, Geburtstags-Paradoxon.

3 Diskrete Wahrscheinlichkeitsmaße, Zähldichten

Diskretes Modell, σ -Additivität, endliche Additivität, Monotonie, Sub- σ -Additivität, Siebformel von Sylvester-Poincaré, Rencontre-Problem, Zähldichte, diskreter Träger, Koinzidenzverteilung, Poisson-Verteilung $Poi(\lambda)$, Qualitätskontrolle/Urnensmodell, hypergeometrische Verteilung $H(N, M, n)$, Bernoulli-Experiment, Binomialverteilung $B(n, p)$, Dirac-Maß.

II Maßtheorie

4 Mengensysteme

σ -Algebra über Ω , meßbarer Raum, Semiring, Ring, Algebra, Erzeugendensystem, n -dimensionale Intervalle, Borelsche σ -Algebra über \mathbb{R}^n , Spur- σ -Algebra, Dynkin-System, good sets principle.

5 Inhalte, Maße, Fortsetzungsproblem

Endliche Additivität, σ -Additivität, Inhalte auf Ringen, Maße auf σ -Algebren, Maßraum, W -Maß, W -Raum, Sub- σ -Additivität, Siebformel, $\limsup A_n$, $\liminf A_n$, Stetigkeit von unten und oben, Stetigkeit in \emptyset , Zählmaß, Fortsetzungsproblem, äußeres Maß, ν -meßbare Mengen, σ -Endlichkeit, Eindeutigkeitssatz, kompakte Systeme, kompakte Approximierbarkeit.

6 Maße auf \mathbb{R}^n , Lebesgue-Maß

Lebesgue-Stieltjes-Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, Verteilungsfunktionen, Korrespondenzsatz, Lebesgue-Maß λ^n auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, uniforme Verteilung (stetige Gleichverteilung), Translationsinvarianz von λ^n , Regularität von Maßen auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

7 Meßbare Abbildungen (Zufallsvariable), Bildmaße, projektive Limiten von W -Maßen

Meßbare Abbildungen, Urbildabbildung, Meßbarkeitskriterien, Borel-Meßbarkeit, σ -Algebra $\sigma(f_i, i \in I)$, fallweise Beschreibung meßbarer Abbildungen, meßbare Fortsetzung, Bildmaß, Zufallsvariable X , Verteilung von X , meßbare $\overline{\mathbb{R}}$ -wertige

Funktionen, Räume $\mathcal{L}^e(\mathcal{A})$, $\mathcal{L}(\mathcal{A})$, $\overline{\mathcal{L}}(\mathcal{A})$, $\overline{\mathcal{L}}_+(\mathcal{A})$, Indikatorfunktion, Elementarfunktion, Positivteil und Negativteil, Approximation durch elementare Funktionen, Standardschluss, projektiver Limes von W -Maßen.

III Integrationstheorie

8 Das μ -Integral

μ -Integral von $f \in \mathcal{L}_+^e$, $f \in \overline{\mathcal{L}}_+$ und $f \in \overline{\mathcal{L}}$, monotone Konvergenz (Levi), Linearität und Monotonie des Integrals, Markov-Ungleichung, Integrierbarkeit und Quasiintegrierbarkeit, Erwartungswert, Laplace-Verteilung, Poisson-Verteilung (diskrete Verteilungen), fast sichere Eigenschaften, Substitutionsregel, Lebesgue-Integral, Lebesgue-Stieltjes-Integral.

9 \mathcal{L}^p -Räume, Konvergenzsätze für Integrale

Räume \mathcal{L}^p und L^p , \mathcal{L}^p -Konvergenz, Hölder-Ungleichung, Cauchy-Schwarz-Ungleichung, Minowski-Ungleichung, Vollständigkeit von \mathcal{L}^p , monotone Konvergenz (Levi), Lemma von Fatou, beschränkte Konvergenz (Lebesgue), Lemma von Scheffé

10 Maße mit Dichten, Verteilungen, Momente

μ -Dichte, Radon-Nikodym Ableitung, absolute Stetigkeit $\nu \ll \mu$, Satz von Radon und Nikodym, Substitutionsregel für das Lebesgue-Integral (C^1 -Diffeomorphismen), Transformationsformel für λ^n -Dichten, (Stammfunktionen, partielle Integration), Varianz, Standardabweichung, Chebyshev-Ungleichung, Median, Normalverteilung, Gammaverteilung, χ^2 -Verteilung, Cauchy-Verteilung, Lebensdauerverteilung, Exponentialverteilung, Weibull-Verteilung, Momente, absolute Momente.

11 Kerne, Produktmaße, Faltung von Verteilungen

Produkt- σ -Algebra, meßbare Rechteckmengen, Schnitte von Mengen, Schnittfunktionen, Kerne, Markov-Kerne, σ -endliche Kerne, Produktmaß, Randmaße, Integration bzgl. Produktmaße, iterierte Integration (Fubini), Abschätzungen für Momente, n -dimensionale Standardnormalverteilung, Faltungsprodukt von W -Maßen, Faltungsprodukt von Normalverteilungen, Gammaverteilungen, Cauchy-Verteilungen, Poisson-Verteilungen, Binomialverteilungen.