**Exkurs: Quantilfunktion und Quantile**

$F : \mathbb{R} \to [0,1]$ sei eine Verteilungsfunktion, d.h. also $F$ ist monoton wachsend, rechtsseitig stetig,

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0 \text{ und } \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1.$$

Wegen dieser Eigenschaften gilt für $y \in (0,1)$

(1) $$\{F \geq y\} = \{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq y\} = [a,\infty) \text{ für ein } a \in \mathbb{R}.$$

Die Abbildung

$$F^{-1} : (0,1) \to \mathbb{R}, F^{-1}(y) := \min\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq y\} = \sup\{x \in \mathbb{R} : F(x) < y\}(= a)$$

heißt **Quantilfunktion** oder verallgemeinerte Inverse von $F$. (Ist $F$ injektiv mit $F(\mathbb{R}) = (0,1)$, dann ist $F^{-1}$ tatsächlich die Umkehrfunktion von $F$. $F^{-1}$ ist hier natürlich nicht die Urbildabbildung.) Offenbar ist $F^{-1}$ monoton wachsend und

(2) $$F(x) \geq y \Leftrightarrow F^{-1}(y) \leq x \text{ für } x \in \mathbb{R}, y \in (0,1).$$

Diese Beziehung impliziert

(3) $$\begin{aligned}\{F^{-1} \leq x\} &= \{y \in (0,1) : F^{-1}(y) \leq x\} = \{y \in (0,1) : F(x) \geq y\} \\ &= (0,1) \cap (0, F(x)] \in \mathcal{B}((0,1)) \text{ für } x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Insbesondere ist $F^{-1}$ Borel-messbar.

(4) $F$ ist die Verteilungsfunktion der Verteilung

$$U(0,1)^{F^{-1}}.$$

Beweis. Mit (3) gilt $U(0,1)^{F^{-1}}((-\infty,x]) = U(0,1)(\{y \in (0,1) : F^{-1}(y) \leq x\}) = \lambda((0,1) \cap (0,F(x)]) = F(x)$ für $x \in \mathbb{R}$. □

Weiter gilt

(5) $$\{F > y\} = \{x \in \mathbb{R} : F(x) > y\} = \langle b,\infty)([b,\infty) \text{ oder } (b,\infty)) \text{ für ein } b \in \mathbb{R}$$

und daher

$$\inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) > y\} = \sup\{x \in \mathbb{R} : F(x) \leq y\}(= b) \geq F^{-1}(y) \text{ für } y \in (0,1).$$

Die linke Seite ist der rechtsseitige Grenzwert $F^{-1}(y+)$ von $F^{-1}$ an der Stelle $y$:

(6) $F^{-1}$ ist linksseitig stetig und $F^{-1}(y+) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) > y\}, y \in (0,1)$.

Beweis. Seien $y_n \in (0,1), y_n < y, y_n \uparrow y$ und $a_n = F^{-1}(y_n)$. Dann ist $(a_n)$ eine monoton wachsende Folge und es gilt

$$\{F \geq y_n\} = [a_n,\infty), \bigcap_{n=1}^{\infty}\{F \geq y_n\} = \{F \geq y\}$$

und

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,\infty)=[a,\infty) \text{ mit } a=\lim_{n\to\infty}a_n.$$

Es folgt $\{F\geq y\}=[a,\infty)$ und damit $F^{-1}(y)=a=\lim_{n\to\infty}F^{-1}(y_n)$. Dies zeigt die linksseitige Stetigkeit von $F^{-1}$.

Für $y_n\in(0,1), y_n>y, y_n\downarrow y$ ist $(a_n)=(F^{-1}(y_n))$ eine monoton fallende Folge und

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\{F\geq y_n\}=\{F>y\}, \bigcup_{n=1}^{\infty}[a_n,\infty)=\langle a,\infty) \text{ mit } a=\lim a_n.$$

Dies liefert $\{F>y\}=\langle a,\infty)$, also

$$F^{-1}(y+)=\lim_{n\to\infty}F^{-1}(y_n)=a=\inf\{x\in I\!R: F(x)>y\}.$$

□

Ferner gilt noch

(7) $$F(x-)\leq y \Leftrightarrow F^{-1}(y+)\geq x \text{ für } x\in I\!R, y\in(0,1).$$

Beweis. Für $z<x\leq F^{-1}(y+)$ gilt $F(z)\leq y$ und damit $F(x-)\leq y$. Umgekehrt folgt $z\geq x$ aus $F(x-)\leq y$ und $F(z)>y$. Dies impliziert mit (6)

$$F^{-1}(y+)=\inf\{x\in I\!R: F(x)>y\}\geq x.$$

□

Nun sei $F$ die Verteilungsfunktion einer Verteilung $Q$ auf $\mathcal{B}(I\!R)$ ($Q=U(0,1)^{F^{-1}}$ nach (4)). Eine reelle Zahl $x$ heißt $\alpha$**-Quantil** von $Q$ für $\alpha\in(0,1)$, falls

$$Q((-\infty,x])\geq\alpha \text{ und } Q([x,\infty))\geq 1-\alpha.$$

Ein 1/2-Quantil heißt **Median**. Wir bezeichnen die Menge der $\alpha$-Quantile von $Q$ mit $M_\alpha=M_\alpha(Q)$. Wegen $F(x)=Q([-\infty,x])$ und $F(x-)=Q((-\infty,x))$ ist $x\in M_\alpha$ gleichbedeutend mit

(8) $$F(x)\geq\alpha \text{ und } F(x-)\leq\alpha.$$

Nach (2) und (7) erhält man also

(9) $$M_\alpha=[F^{-1}(\alpha),F^{-1}(\alpha+)].$$

Ist $F$ stetig, so gilt

(10) $$M_\alpha=\{x\in I\!R: F(x)=\alpha\}.$$

Die Verteilungskonvergenz (schwache Konvergenz) impliziert die Konvergenz der $\alpha$-Quantile. Präziser gilt:

(11) Seien $Q_n, Q$ $W$-Maße auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ mit Verteilungsfunktionen $F_n, F, \alpha \in (0,1)$ und $c_n \in M_\alpha(Q_n)$. Falls $Q_n \xrightarrow{d} Q$ und $F^{-1}$ in $\alpha$ stetig ist, gilt

$$\lim_{n\to\infty} c_n = F^{-1}(\alpha) \text{ (und } M_\alpha(Q) = \{F^{-1}(\alpha)\}).$$

Beweis. Es gilt $c := \liminf c_n \geq b := F^{-1}(\alpha)$. Andernfalls wähle man $\varepsilon > 0$ mit $c+\varepsilon \leq b-\varepsilon$ und $b-\varepsilon \in C(F) := \{x \in \mathbb{R} : F \text{ in } x \text{ stetig }\}$. Es gibt eine Teilfolge $(c_{n_k})$ von $(c_n)$ mit $c_{n_k} \leq b-\varepsilon$ für alle $k$, woraus mit (8)

$$\alpha \leq F_{n_k}(c_{n_k}) \leq F_{n_k}(b-\varepsilon)$$

für alle $k$ folgt. Wegen $b-\varepsilon \in C(F)$ gilt

$$F_{n_k}(b-\varepsilon) \to F(b-\varepsilon), k \to \infty.$$

Dies liefert $F(b-\varepsilon) \geq \alpha$, was zum Widerspruch

$$b = F^{-1}(\alpha) = \min\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq \alpha\} \leq b-\varepsilon$$

führt.

Es gilt $c := \limsup c_n \leq b := F^{-1}(\alpha)$. Andernfalls wähle man $\varepsilon > 0$ mit $c-\varepsilon > b+\varepsilon$ und $b+\varepsilon \in C(F)$. Es gibt eine Teilfolge $(c_{n_k})$ von $(c_n)$ mit $c_{n_k} \geq c-\varepsilon$ für alle $k$, woraus mit (8)

$$\alpha \geq F_{n_k}(c_{n_k}-) \geq F_{n_k}(b+\varepsilon)$$

für alle $k$ folgt. Wegen $b+\varepsilon \in C(F)$ gilt

$$F_{n_k}(b+\varepsilon) \to F(b+\varepsilon), k \to \infty.$$

Dies liefert $\alpha \geq F(b+\varepsilon)$, was zum Widerspruch

$$b = F^{-1}(\alpha) = F^{-1}(\alpha+) = \sup\{x \in \mathbb{R} : F(x) \leq \alpha\} \geq b+\varepsilon$$

führt. □