## Exkurs C: Gleichgradige Integrierbarkeit

Die fast sichere Konvergenz einer Folge von ZV impliziert im allgemeinen nicht deren $\mathscr{L}^p$-Konvergenz. $\mathscr{L}^p$-Konvergenz gilt für genau die fast sicher oder auch nur stochastisch konvergenten Folgen, die "gleichgradig integrierbar" sind.

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sei ein W-Raum.

**C1 Definition** $B \subset \mathscr{L}^1 = \mathscr{L}^1(P)$ heißt gleichgradig integrierbar (g.i.), falls

$$\sup_{Y \in B} E|Y| 1_{\{|Y|>a\}} \to 0, a \to \infty.$$

Gleichgradig integrierbare Mengen heißen bisweilen auch gleichmäßig integrierbar. Die gleichgradige Integrierbarkeit einer Teilmenge $B$ von $\mathscr{L}^1$ ist eine Kompaktheitseigenschaft: $B$ ist relativ $\sigma(L^1, L^\infty)$-kompakt.

**C2 Beispiel** (a) $\mathscr{L}^1$-majorisierte Mengen sind g.i., also $|Y| \leq Z \in \mathscr{L}^1$ für alle $Y \in B \Rightarrow B$ ist g.i.:

$$|Y| 1_{\{|Y|>a\}} \leq Z 1_{\{Z>a\}} \to 0 \text{ punktweise}$$

und daher

$$\sup_{Y \in B} E|Y| 1_{\{|Y|>a\}} \leq E Z 1_{\{Z>a\}} \to 0, a \to \infty$$

nach dem Satz von der beschränkten Konvergenz.

(b) $B \subset \mathscr{L}^1$ endlich $\Rightarrow B$ ist g.i. Dies folgt aus (a).

(c) $B \subset \mathscr{L}^1$ sei $\mathscr{L}^p$-beschränkt für ein $\underline{p > 1}$, d.h. $\sup_{Y \in B} E|Y|^p < \infty \Rightarrow B$ g.i.:

Sei $c = \sup_{Y \in B} E|Y|^p$ und $\varepsilon > 0$. Wähle $a > 0$ mit $t^p \geq ct/\varepsilon$ für alle $t > a$. Dann gilt

$$E|Y| 1_{\{|Y|>a\}} \leq \frac{\varepsilon}{c} E|Y|^p 1_{\{|Y|>a\}} \leq \frac{\varepsilon}{c} c = \varepsilon$$

für alle $Y \in B$ . $\square$

Die gleichgradige Integrierbarkeit läßt sich wie folgt charakterisieren.

**C3 Lemma** $B \subset \mathscr{L}^1$ ist genau dann g.i., wenn $B$ die beiden folgenden Eigenschaften hat:

(i) $\sup_{Y \in B} E|Y| < \infty$, d.h. $B$ ist $\mathscr{L}^1$- beschränkt und

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ mit
$P(F) \leq \delta, F \in \mathcal{F} \Rightarrow \sup_{Y \in B} \int_F |Y| dP \leq \varepsilon$
d.h. die Menge der endlichen Maße$\{|Y|P : Y \in B\}$ ist gleichmäßig P-absolut stetig.

Beweis. Bauer (1992), Maß- und Integrationstheorie, S.140, 146. □

Die $\mathscr{L}^1$- Beschränktheit ist also eine notwendige Bedingung und die $\mathscr{L}^p$- Beschränktheit für ein $p > 1$ eine hinreichende Bedingung für die gleichgradige Integrierbarkeit.

Das $\mathscr{L}^p$- Konvergenzproblem für stochastisch konvergente Folgen wird durch folgenden Satz gelöst.

**C4 Satz** $(X_n)_{n \geq 0}$ sei eine $\mathscr{L}^p$-Folge , $1 \leq p < \infty$, und $Y$ eine reelle ZV mit $X_n \to Y$ $P$-stochastisch. Dann sind äquivalent :

(i) $\{|X_n|^p : n \in I\!N_0\}$ ist g.i.

(ii) $Y \in \mathscr{L}^p$ und $X_n \stackrel{\mathscr{L}^p}{\to} Y$.

(iii) $Y \in \mathscr{L}^p$ und $E|X_n|^p \to E|Y|^p$.

Ferner folgt aus jeder dieser äquivalenten Bedingungen

$$EX_n \to EY.$$

Beweis. Bauer (1992), S. 144 - 146. □

Das Lemma von Fatou hat eine sehr allgemeine Version.

**C5 Satz** (Fatou) $(X_n)_{n \geq 0}$ sei eine Folge von ZV.
(a) $\liminf X_n$ sei quasi- integrierbar und $\{X_n^- : n \in I\!N_0\}$ sei g.i. Dann gilt

$$E \liminf X_n \;\leq\; \liminf EX_n$$

(b) $\limsup X_n$ sei quasi - integrierbar und $\{X_n^+ : n \in I\!N_0\}$ sei g.i. Dann gilt

$$\limsup EX_n \;\leq\; E \limsup X_n.$$

Beweis. Hoffmann- Jørgensen I (1994), S. 189. □

Für Martingaltheorie ist interessant:

**C6 Satz** Für $Z \in \mathscr{L}^1$ ist

$$B = \{E(Z|\mathcal{G}) : \mathcal{G} \subset \mathcal{F} \text{ Unter - } \sigma - \text{Algebra } \} \text{ g.i.}$$

Beweis. Wegen $|Z|P << P$ ( $|Z|P$ ist das endliche Maß mit $P$-Dichte $|Z|$ ) existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$P(F) \leq \delta, F \in \mathcal{F} \Rightarrow \int\limits_F |Z| dP \leq \varepsilon.$$

Wähle $a > 0$ mit $E|Z| \leq a\delta$. Aus der Markov- Ungleichung folgt

$$P(|E(Z|\mathcal{G})| > a) \ \leq \frac{1}{a} E|E(Z|\mathcal{G})| \leq \frac{1}{a} EE(|Z||\mathcal{G}) = \frac{E|Z|}{a} \leq \delta$$

und daher

$$\int\limits_{\{|E(Z|\mathcal{G})|>a\}} E(Z|\mathcal{G})| dP \ \leq \int\limits_{\{\ldots\}} |Z| dP \ \leq \varepsilon$$

für alle $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$. $\square$