Exkurs F: Geometrische Lévy-Prozesse in Math. Finance

$I\!\!F = (\mathcal{F})_{t\geq 0}$ sei eine Filtration in $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und $X = (X_t)_{t\geq 0}$ ein reeller càdlag $I\!\!F$-Lévy-Prozeß. Mit A wird der **geometrische Lévy-Prozeß**

$$A_t := A_0 e^{X_t}, t \geq 0$$

bezeichnet, $A_0 \in (0, \infty)$. Natürlich ist A $I\!\!F$-adaptiert.

F1 Satz A ist ein $I\!\!F$-Markov-Prozeß mit Zustandsraum $(0, \infty)$ und HG

$$R_t(x, \cdot) = P^{xe^{X_t}} = P^{xA_t/A_0}.$$

Beweis. Wegen Satz 10.5 ist X ein $I\!\!F$-Markov-Prozeß mit Zustandsraum $I\!\!R$ und HG $K_t(x, \cdot) = P^{x+X_t}$. Durch $R_t(x, \cdot) := P^{xe^{X_t}}$ wird für jedes $t \geq 0$ ein Markov-Kern auf $(0, \infty)$ definiert. Die Abbildung $F : I\!\!R \to (0, \infty), F(x) := A_0 e^x$ ist surjektiv, meßbar, $A_t = F(X_t)$ und es gilt

$$K_t(x, \cdot)^F = P^{F(x+X_t)} = P^{A_0 e^{x+X_t}} = P^{F(x)e^{X_t}} = R_t(F(x), \cdot)$$

für alle $t \geq 0, x \in I\!\!R$. Damit folgt die Behauptung aus Satz 10.6. □

Sei

$$\Theta := \{\vartheta \in I\!\!R : Ee^{\vartheta X_t} < \infty \ \forall t \geq 0\}.$$

Die Eigenschaft endlicher exponentieller Momente ist nicht zeitabhängig, das heißt

$$\Theta = \{\vartheta \in I\!\!R : Ee^{\vartheta X_1} < \infty\}$$

([4], S. 165). Die Funktion

$$\psi : \Theta \to I\!\!R, \psi(\vartheta) := \log Ee^{\vartheta X_1}$$

heißt **Kumulantentransformation von** X_1 (unter P).

F2 Lemma Θ und ψ sind konvex.

Beweis. Für $\vartheta_i \in \Theta, \alpha \in (0, 1)$ und $\vartheta := \alpha\vartheta_1 + (1 - \alpha)\vartheta_2$ gilt wegen der Hölder-Ungleichung mit $u = 1/\alpha, v = 1/(1 - \alpha)$

$$\begin{aligned} Ee^{\vartheta X_1} &= Ee^{\alpha\vartheta_1 X_1} e^{(1-\alpha)\vartheta_2 X_1} \\ &= E(e^{\vartheta_1 X_1})^{1/u}(e^{\vartheta_2 X_1})^{1/v} \\ &\leq (E^{\vartheta_1 X_1})^{1/u}(Ee^{\vartheta_2 X_1})^{1/v} < \infty \end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned}\psi(\vartheta &= \log Ee^{\vartheta X_1} \leq \tfrac{1}{u}\log Ee^{\vartheta_1 X_1} + \tfrac{1}{v}\log Ee^{\vartheta_2 X_1}\\ &= \alpha\psi(\vartheta_1) + (1-\alpha)\psi(\vartheta_2).\end{aligned}$$

Also ist Θ eine konvexe Menge und ψ eine konvexe Funktion. $\square$

F3 Lemma Es gilt

$$Ee^{\vartheta X_t} = e^{t\psi(\vartheta)}$$

für alle $t \geq 0, \vartheta \in \Theta$.

Beweis. Für $\vartheta \in \Theta$ sei

$$f = f^\vartheta : I\!R_+ \to (0,\infty), f(t) := Ee^{\vartheta X_t}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}f(s+t) &= Ee^{\vartheta X_{s+t}} = Ee^{\vartheta(X_{s+t}-X_t+X_t)}\\ &= Ee^{\vartheta(X_{s+t}-X_t)}Ee^{\vartheta X_t}\\ &= Ee^{\vartheta X_s}Ee^{\vartheta X_t} = f(s)f(t)\end{aligned}$$

für alle $s, t \geq 0$. Ferner ist f Borel-meßbar. Dazu betrachte man die Prozesse

$$X_t^n := \sum_{k=0}^{\infty} X_{(k+1)/n} 1_{[k/n,(k+1)/n)}(t), t \geq 0, n \in I\!N.$$

X^n ist offenbar produkt-meßbar, das heißt

$$I\!R_+ \times \Omega \to I\!R, (t,\omega) \mapsto X_t^n(\omega)$$

ist $(\mathscr{B}(I\!R_+) \otimes \mathcal{F}, \mathscr{B}(I\!R))$-meßbar. Da X càd ist, gilt $\lim_{n\to\infty} X_t^n(\omega) = X_t(\omega)$ für alle $(t,\omega) \in I\!R_+ \times \Omega$ und somit ist auch X produkt-meßbar. Es folgt die Meßbarkeit von f. Die eindeutige meßbare Lösung f obiger Funktionalgleichung mit $f(1) = e^{\psi(\vartheta)}$ ist $f(t) = e^{t\psi(\vartheta)}, t \geq 0$ ([2], S. 5). $\square$

F4 Lemma Für $\vartheta \in \Theta$ ist der Prozeß

$$\left(\frac{e^{\vartheta X_t}}{Ee^{\vartheta X_t}}\right)_{t\geq 0} = (e^{\vartheta X_t - t\psi(\vartheta)})_{t\geq 0}$$

ein $I\!F$-Martingal.

Beweis. Sei $L_t := e^{\vartheta X_t - t\psi(\vartheta)}$. L ist ein $I\!F$-adaptierter $\mathscr{L}^1$-Prozeß und für $0 \leq s < t, F \in \mathcal{F}_s$ gilt nach Lemma F 3

$$\begin{aligned}\int_F L_t dP &= \int_F e^{\vartheta(X_t-X_s)-t\psi(\vartheta)}e^{\vartheta X_s}dP\\ &= \int e^{\vartheta(X_t-X_s)-t\psi(\vartheta)}dP \int_F e^{\vartheta X_s}dP\\ &= e^{(t-s)\psi(\vartheta)-t\psi(\vartheta)}\int_F e^{\vartheta X_s}dP\\ &= \int_F L_s dP. \qquad \square\end{aligned}$$

Es gibt ein wachsendes Interesse an geometrischen Lévy-Prozessen zur Modellierung von Finanzmärkten. Sei $T \in (0,\infty)$ und z.B.

$$B_t := B_0 e^{rt}, t \in [0,T]$$

mit $B_0 \in (0,\infty), r \geq 0$ und

$$S := ((B_t, A_t))_{t \in 0,T]}.$$

Die auf $[0,T]$ eingeschränkte Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ wird auch mit $I\!\!F$ bezeichnet. Das BS-Modell erhält man für $X_t = \sigma W_t + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t$ und $I\!\!F = (I\!\!F^W)^*$. Lévy-Prozeß-Marktmodelle $(S, I\!\!F)$ sind unter gewissen Voraussetzungen arbitragefrei aber für Lévy-Prozesse, die nicht stetig sind, typischerweise unvollständig (auch dann, wenn $I\!\!F = (I\!\!F^X)^*$ gilt).

Wir beschreiben eine Methode zur Auswahl eines äquivalenten Martingalmaßes. Sei

$$I\!\!P := \{Q \in M^1(\Omega, \mathcal{F}_T) : Q \equiv P|\mathcal{F}_T, (\beta_t A_t)_{t\in[0,T]} \text{ ist ein } Q-\text{Martingal}\}$$

wobei $\beta = 1/B$ und

$$I\!\!P_L := \{Q \in I\!\!P : (X_t)_{t\in[0,T]} \text{ ist ein } I\!\!F-\text{Lévy-Prozeß unter } Q\}.$$

Für $\vartheta \in \Theta$ sei

$$L_t^\vartheta := e^{\vartheta X_t - t\psi(\vartheta)}, t \in [0,T]$$

und

$$Q^\vartheta := L_T^\vartheta (P|\mathcal{F}_T).$$

Dann ist Q^ϑ ein W-Maß auf $\mathcal{F}_T$ mit $Q^\vartheta \equiv P|\mathcal{F}_T$. Q^ϑ heißt **Esscher-Transformation von P unter** ϑ. Ferner sei

$$I\!\!P_{EL} := \{Q^\vartheta : \vartheta, \vartheta+1 \in \Theta, \psi(\vartheta+1) = r + \psi(\vartheta)\}.$$

F5 Satz Es gilt $I\!\!P_{EL} \subset I\!\!P_L$.

Beweis. Sei $Q^\vartheta \in I\!\!P_{EL}$. Für $0 \leq s < t \leq T, F \in \mathcal{F}_s$ und $A \in \mathcal{B}(I\!\!R)$ gilt nach Lemma F4

$$\begin{aligned}
Q^\vartheta(\{X_t - X_s \in A\} \cap F) &= \textstyle\int_F 1_A(X_t - X_s) L_T^\vartheta dP \\
&= \textstyle\int_F 1_A(X_t - X_s) L_t^\vartheta dP \\
&= \textstyle\int_F 1_A(X_t - X_s) \exp[\vartheta(X_t - X_s) - \vartheta X_s - t\psi(\vartheta)] dP \\
&= \textstyle\int 1_A(X_t - X_s) \exp[\vartheta(X_t - X_s) - t\psi(\vartheta)] dP \int_F \exp(\vartheta X_s) dP \\
&= \textstyle\int 1_A(X_t - X_s) \exp[\vartheta(X_t - X_s) - (t-s)\psi(\vartheta)] dP \int_F \exp[\vartheta X_s - s\psi(\vartheta)] dP \\
&= \textstyle\int 1_A(X_{t-s}) \exp[\vartheta X_{t-s} - (t-s)\psi(\vartheta)] dP \int_F L_s^\vartheta dP \\
&= \textstyle\int 1_A(X_{t-s}) L_{t-s}^\vartheta dP \int_F L_s^\vartheta dP \\
&= Q^\vartheta(X_{t-s} \in A) Q^\vartheta(F).
\end{aligned}$$

Für $F = \Omega$ folgt $(Q^\vartheta)^{X_t - X_s} = (Q^\vartheta)^{X_{t-s}}$. Daher ist $(X_t)_{t\in[0,T]}$ ein $I\!F$-Lévy-Prozeß unter Q^ϑ. (Dies gilt für alle $\vartheta \in \Theta$.)

Der diskontierte Aktienpreisprozeß βA,

$$\beta_t A_t = \frac{A_0}{B_0} e^{X_t - rt}, t \in [0,T],$$

ist wegen Lemma F 4 genau dann ein Q^ϑ-Martingal, wenn $E_{Q^\vartheta} E^{X_t} = e^{rt}$ für alle $t \in [0,T]$ gilt. Diese Bedingung ist erfüllt, denn wegen Lemma F 3 gilt

$$\begin{aligned} E_{Q^\vartheta} \exp(X_t - rt) &= E_P \exp(X_t - rt) L_t^\vartheta \\ &= E_P \exp[X_t - rt + \vartheta X_t - t\psi(\vartheta)] \\ &= E_P \exp[(\vartheta+1) X_t - t(r + \psi(\vartheta))] \\ &= \exp[t\psi(\vartheta+1) - t(r+\psi(\vartheta))] \\ &= \exp(0) = 1. \end{aligned}$$

Es folgt $Q^\vartheta \in I\!P_L$. □

F6 Beispiele (a) (BS-Modell). Sei $X_t = \sigma W_t + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t, \mu \in I\!R, \sigma > 0$ mit einer $I\!F$-BM W und $I\!F = (I\!F^W)^*$. Dann gilt $\Theta = I\!R$,

$$\psi(\vartheta) = \frac{\vartheta^2 \sigma^2}{2} + \vartheta(\mu - \frac{\sigma^2}{2}),$$

$\vartheta^* = (r-\mu)/\sigma^2$ ist die eindeutige Lösung der Gleichung $\psi(\vartheta+1) = r + \psi(\vartheta)$ in $I\!R$ und $L^{\vartheta^*} = \mathcal{E}(\frac{r-\mu}{\sigma} W)$. Hier gilt $I\!P = I\!P_L = I\!P_{EL} = \{Q^{\vartheta^*}\}$ und die Esscher-Transformation Q^{ϑ^*} stimmt mit der Girsanov-Transformation überein (vgl. Korollar 11.4).

(b) (Poisson-Modell) Sei N ein (càdlàg) Poisson-Prozeß mit Intensität $c > 0$ (s. Beipiel 7.3) und $X_t = N_t - \mu t, \mu \geq 0$. Dann gilt $\Theta = I\!R$,

$$\psi(\vartheta) = c(e^\vartheta - 1) - \mu\vartheta,$$

$\vartheta^* = \log(\frac{r+\mu}{c(e-1)})$ ist die eindeutige Lösung der Gleichung $\psi(\vartheta+1) = r + \psi(\vartheta)$, falls $r + \mu > 0$ (es existiert keine Lösung, falls $r + \mu = 0$) und $L_t^{\vartheta^*} = \exp[\vartheta^* N_t - c(e^{\vartheta^*} - 1)t]$ (vgl. Aufgabe 46). Man erhält also $I\!P_{EL} = \{Q^{\vartheta^*}\}$, falls $r + \mu > 0$ und $I\!P_{EL} = \emptyset$, falls $r + \mu = 0$.

Das Poisson-Modell ist nicht sehr realistisch. Interessantere (und kompliziertere) Modelle findet man in [1], [3], [5].

Sei $Q \in I\!P$ und C ein Q-Claim, das heißt C ist eine positive $\mathcal{F}_T$-meßbare Zufallsvariable mit $C \in \mathscr{L}^1(Q)$. Dann ist

$$V_t = e^{-r(T-t)} E_Q(C|\mathcal{F}_t), t \in [0,T]$$

ein **arbitragefreier Preisprozeß** des Claims C. Für pfadunabhängige Claims $C = f(A_T)$ mit einer meßbaren Funktion $f : (0, \infty) \to I\!R_+$ und $Q \in I\!P_L$ folgt aus Satz F1

$$V_t = e^{-r(T-t)} E_Q(f(A_T)|\mathcal{F}_t) = V(t, A_t)$$

mit der **Preisfunktion**

$$\begin{aligned} V(t,x) &= e^{-r(T-t)} R^Q_{T-t} f(x) \\ &= e^{-r(T-t)} \int f(y) dQ^{xe^{X_{T-t}}}(y) \\ &= e^{-r(T-t)} \int f(xe^{X_{T-t}}) dQ, t \in [0,T], x > 0 \end{aligned}$$

(vgl. Satz 11.6). Für $Q = Q^\vartheta \in I\!P_{EL}$ gilt

$$\begin{aligned} V(t,x) &= e^{-r(T-t)} \int f(xe^{X_{T-t}}) L^\vartheta_{T-t} dP \\ &= e^{-r(T-t)} \int f(xe^y) \exp[\vartheta y - (T-t)\psi(\vartheta)] dP^{X_{T-t}}(y) \\ &= \int f(xe^y) \exp[\vartheta y - (T-t)\psi(\vartheta + 1)] dP^{X_{T-t}}(y). \end{aligned}$$

Im BS-Modell (s. E 6, $\vartheta = \vartheta^*$) ist

$$\exp[\vartheta y - (T-t)\psi(\vartheta)] \, \frac{dP^{X_{T-t}}}{d\lambda}(y)$$

die λ-Dichte der $N((r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t), \sigma^2(T-t))$-Verteilung und man erhält wieder

$$V(t,x) = e^{-r(T-t)} \int f(x \exp[\sigma y \sqrt{T-t} + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)] dN(0,1)(y)$$

(s. Satz 11.6)

F7 Beispiel (Call) Sei $C = (A_T - K)^+, K > 0$ und $I\!P_{EL} \neq \emptyset, Q = Q^\vartheta \in I\!P_{EL}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} V(t,x) &= \int (xe^y - K)^+ \exp[\vartheta y - (T-t)\psi(\vartheta+1)] dP^{X_{T-t}}(y) \\ &= x \int_{\log(K/x)}^\infty \exp[(\vartheta+1)y - (T-t)\psi(\vartheta+1)] dP^{X_{T-t}}(y) \\ &\quad -Ke^{-r(T-t)} \int_{\log(K/x)}^\infty \exp[\vartheta y - (T-t)\psi(\vartheta)] dP^{X_{T-t}}(y), \end{aligned}$$

$t \in [0,T], x > 0$. Man beachte $C \in \mathscr{L}^1(Q)$, denn wegen $\vartheta + 1 \in \Theta$ gilt

$$\begin{aligned} E_Q C &\leq E_Q A_T = E_P A_0 e^{X_T} L^\vartheta_T \\ &= A_0 E_P \exp[(\vartheta+1) X_T - T\psi(\vartheta)] < \infty. \end{aligned}$$

Literatur

[1] Applebaum, D. (2004). Lévy Processes and Stochastic Calculus. Cambridge University Press.

[2] Bingham, N.H., Goldie, C.M., Teugels, J.L. (1987). Regular Variation. Cambridge University Press.

[3] Boyarchenko, S.I., Levendorskii, S.Z. (2002). Non-Gaussian Merton-Black-Scholes Theory. World Scientific.

[4] Sato, K.-I. (1999). Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions. Cambridge University Press.

[5] Schoutens, W. (2003). Lévy Processes in Finance. Wiley.