Exkurs E: Das Kolmogorov-Kriterium

L^p-Hölder-stetige stochastische Prozesse mit geeigneten Hölder-Exponenten besitzen eine (pfad-)stetige Modifikation.

E1 Satz (Kolmogorov) $X = (X_t)_{t\geq 0}$ sei ein reeller stochastischer Prozess mit

$$E|X_s - X_t|^a \leq C|s-t|^{1+b}$$

für alle $s,t \in I\!R_+$ und reellen Konstanten $a, b, C > 0$. Dann besitzt X eine stetige Modifikation.

E2 Bemerkung (a) Sei zusätzlich $X_t \in L^a(P)$ für ein $t \geq 0$. Unter obiger Regularitätsbedingung gilt dann $X_t \in L^a(P)$ für alle $t \geq 0$. Sei

$$\varphi : I\!R_+ \to L^a(P), \varphi(t) := X_t.$$

Durch $d(Y,Z) := (E|Y-Z|^a)^{1/(a\vee 1)}$ wird eine Metrik auf $L^a(P)$ definiert. Obige Bedingung bedeutet also

$$d(\varphi(s), \varphi(t)) \leq C_1|s-t|^{(1+b)/(a\vee 1)}$$

für alle $s,t \in I\!R_+$ mit $C_1 = C^{(1+b)/(a\vee 1)}$, das heißt φ ist Hölder-stetig mit Exponent $(1+b)/(a\vee 1)$. Falls $P(X_t \neq X_0) > 0$ für ein $t > 0$, gilt für den Hölder-Exponent $(1+b)/(a \vee 1) \leq 1$ (analog zum Fall reeller Funktionen), also

$$1 + b \leq a.$$

(b) Für zentrierte Gauß-Prozesse X reicht die Bedingung

$$E|X_s - X_t|^2 \leq C|s-t|^\beta$$

für alle $s,t \in I\!R_+$ und Kostanten $\beta, C > 0$. Dazu sei $\sigma^2 := E|X_s - X_t|^2$ und $Z \sim N(0,1)$. Falls $\beta \leq 1$, wähle $a > 2/\beta$. Dann gilt

$$E|X_s - X_t|^a = (\sigma^2)^{a/2} E|Z|^a \leq C^{a/2} E|Z|^a |s-t|^{\beta a/2}$$

und $\beta a/2 > 1$.

Beweis von Satz E 1 1. Wir konstruieren zunächst eine stetige Modifikation von $(X_t)_{t\in[0,1]}$. Für $n \in I\!N$ sei $D_n := \{k/2^n : k \in \{0,\ldots,2^n\}\}$. Wir definieren Prozesse $X^n = (X_t^n)_{t\in[0,1]}$ durch $X_t^n := X_t$ für $t \in D_n$ und die Forderung nach stückweise affinen und stetigen Pfaden, also

$$X_t^n := \lambda X_{k/2^n} + (1-\lambda) X_{(k-1)/2^n},$$

falls $t = \lambda k 2^{-n} + (1-\lambda)(k-1)2^{-n}$ mit $\lambda \in [0,1], k \in \{1,\ldots,2^n\}$. Für $t \in [0,1]$ und $s \in D_n$ mit $|t-s| \le 2^{-n}$ gilt dann

$$|X_t^n - X_s| \le \max_{1\le k\le 2^n} |X_{k/2^n} - X_{(k-1)/2^n}| =: Z_n.$$

"Chaining" liefert eine Abschätzung für $\sup_{t\in[0,1]} |X_t^n - X_t^m|$. Für $m > n$ und $t \in [0,1]$ wähle man rekursiv $s_j \in D_j, j = m,\ldots,n$ mit $|t-s_m| \le 2^{-m}$ und $|s_j - s_{j-1}| \le 2^{-(j-1)}$ für $n < j \le m$. Dann gilt $|t-s_n| \le 2^{-n}$ und wegen der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} |X_t^n - X_t^m| &\le |X_t^n - X_{s_n}| + \sum_{j=n+1}^m |X_{s_{j-1}} - X_{s_j}| + |X_{s_m} - X_t^m| \\ &\le Z_n + Z_m + \sum_{j=n+1}^m |X_{s_{j-1}} - X_{s_j}|. \end{aligned}$$

Ist $s_j = k_1 2^{-j}, s_{j-1} = k_2 2^{-(j-1)}$ und k_1 gerade, so gilt $s_j = (k_1/2)2^{-(j-1)} \in D_{j-1}, |k_1/2 - k_2| \le 1$ und daher $|X_{s_{j-1}} - X_{s_j}| \le Z_{j-1}$. Ist k_1 ungerade, $s_{j-1} = 2k_2 2^{-j} \in D_j$, so gilt wegen $|k_1 - 2k_2| \le 2$ schon $|k_1 - 2k_2| \le 1$ und daher $|X_{s_{j-1}} - X_{s_j}| \le Z_j$. Es folgt $|X_t^n - X_t^m| \le 2\sum_{j=n}^m Z_j$ und weil diese obere Schranke unabhängig von $t \in [0,1]$ ist,

$$\sup_{m\ge n}\sup_{t\in[0,1]} |X_t^n - X_t^m| \le 2\sum_{j=n}^\infty Z_j.$$

Wir zeigen jetzt, dass diese Reihenreste fast sicher gegen 0 konvergieren. Dies ist eine Konsequenz der Regularitätsvoraussetzung in D1. Sei dazu $\gamma \in (0, b/a)$. Wegen monotoner Konvergenz gilt

$$\begin{aligned} E\sum_{n=1}^\infty (2^{\gamma n} Z_n)^a &= \sum_{n=1}^\infty 2^{\gamma a n} E Z_n^a \\ &\le \sum_{n=1}^\infty 2^{\gamma a n} \sum_{k=1}^{2^n} E|X_{k/2^n} - X_{(k-1)/2^n}|^a \\ &\le C\sum_{n=1}^\infty 2^{\gamma a n} 2^n 2^{-(1+b)n} = C\sum_{n=1}^\infty 2^{-(b-\gamma a)n} < \infty \end{aligned}$$

und daher $\sum_{n=1}^\infty (2^{\gamma n} Z_n)^a < \infty$ f.s. Insbesondere gilt

$$2^{\gamma n} Z_n \to 0 \text{ f.s.},\ n \to \infty.$$

Die Konvergenz der Reihe $\sum 2^{-\gamma n}$ impliziert also

$$\sum_{n=1}^\infty Z_j < \infty \text{ f.s.},$$

so dass die Reihenreste fast sicher gegen 0 konvergieren. Wir haben damit gezeigt, dass für eine meßbare P-Nullmenge N und $\omega \in N^c$ die Folge $(X_\cdot^n(\omega))_n$ eine Cauchy-Folge in dem Banach-Raum $C([0,1])$ ist. Daher besitzt diese Folge einen Grenzwert $\tilde{Y}_\cdot(\omega) \in C([0,1])$, also

$$\sup_{t\in[0,1]} |X_t^n(\omega) - \tilde{Y}_t(\omega)| \to 0, n \to \infty.$$

Definiert man $Y_t(\omega) := \tilde{Y}_t(\omega)$, falls $\omega \in N^c$ und $Y_t(\omega) := 0$, falls $\omega \in N$, so ist $Y = (Y_t)_{t\in[0,1]}$ ein stetiger stochastischer Prozeß mit

$$\sup_{t\in[0,1]} |X_t^n - Y_t| \to 0 \text{ f.s.}$$

Für $t \in D_m$ und $n \geq m$ gilt ($D_m \subset D_n$ und) $X_t^n = X_t$ und daher $Y_t = X_t$ f.s. für alle $t \in D := \bigcup_{m=1}^{\infty} D_m$. Ist schließlich $t \in [0,1]$ beliebig, so gibt es $s_n \in D$ mit $s_n \to t$ und aus

$$P(|X_t - X_{s_n}| \geq \epsilon) \leq \epsilon^{-a} E|X_t - X_{s_n}|^a \leq C\epsilon^{-a}|t - s_n|^{1+b} \to 0$$

für $\epsilon > 0$ folgt $Y_{s_n} = X_{s_n} \xrightarrow{P} X_t$. Wegen der Stetigkeit von Y gilt andererseits $Y_{s_n}(\omega) \to Y_t(\omega)$ für jedes $\omega \in \Omega$. Aus der f.s. Eindeutigkeit stochastischer Limiten folgt $Y_t = X_t$ f.s., das heißt Y ist eine stetige Modifikation von X.

2. Völlig analog kann man $(X_t)_{t\in[0,T]}$ für $T \in (0,\infty)$ stetig modifizieren.

3. Für $n \in I\!N$ sei $Y^n = (Y_t^n)_{t\in[0,n]}$ eine stetige Modifikation von $(X_t)_{t\in[0,n]}$. Für $m > n$ und $t \in [0,n]$ gilt also $Y_t^n = X_t = Y_t^m$ f.s. und nach 7.10 sind daher Y^n und $(Y_t^m)_{t\in[0,n]}$ nicht unterscheidbar. Für $t \geq 0$ setze man

$$Y_t := Y_t^n, \text{ falls } t \in [n-1, n).$$

Dann ist Y offensichtlich eine f.s. stetige Modifikation von X und durch Abänderung von Y auf einer meßbaren P-Nullmenge erhält man eine stetige Modifikation. □

E3 Bemerkung Der Beweis von Satz E 1 gilt unverändert, wenn X ein $I\!R^d$-wertiger Prozeß ist.