Exkurs D: Unvollständige Marktmodelle, Superhedging für europäische Optionen

Im arbitragefreien, unvollständigen, N-Perioden Marktmodell ist nicht jeder Claim hedgebar. Mit Hilfe der Idee des Superhedging läßt sich die Preistheorie auf solche Claims erweitern. Allerdings ist der Preis nicht-hedgebarer Claims nicht mehr eindeutig .

Gegeben sei ein N-Perioden Marktmodell, $I = \{0, \dots, N\}$ mit $I\!P \neq \emptyset$ und $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. C sei ein europäischer Claim, also C is $\mathcal{F}_N$-meßbar und $C \geq 0$.

$$\overline{\Pi}(C) := \inf\{V_0(H) : H \in SF,\ V_N(H) \geq C\}\ (\inf \emptyset := \infty)$$

heißt **oberer Deckungspreis (ask)** von C. Strategien $H \in SF$ mit $V_N(H) \geq C$ heißen **Superhedgingstrategien** für C. Solche Strategien dienen der Absicherung des Verkäufers des Claims.

$$\underline{\Pi}(C) := \sup\{V_0(H) : H \in SF,\ V_N(H) \leq C\}$$

heißt **unterer Deckungspreis (bid)** von C. Für $H := 0$ gilt $H \in SF, V_N(H) = 0 \leq C$ und daher $\underline{\Pi}(C) \geq 0$.

$$\overline{\Pi}(C) - \underline{\Pi}(C)$$

ist der **bid-ask spread**. Ziel ist eine Formel zur Berechnung von $\overline{\Pi}(C)$ und $\underline{\Pi}(C)$ analog der Preisformel für hedgebare Claims. (s. Satz 4.14) und der Nachweis der Existenz von Superhedgingstrategien mit minimaler Anfangsinvestition $\overline{\Pi}(C)$.

D1 Lemma Es gilt

$$0 \leq \underline{\Pi}(C) \leq \inf_{Q \in I\!P} E_Q(\frac{\beta_N C}{\beta_0}) \leq \sup_{Q \in I\!P} E_Q(\frac{\beta_N C}{\beta_0}) \leq \overline{\Pi}(C).$$

Beweis. Zum Nachweis der Ungleichung

$$\overline{\alpha}(C) := \sup_{Q \in I\!P} E_Q(\frac{\beta_N C}{\beta_0}) \leq \overline{\Pi}(C)$$

können wir o.E. $\overline{\Pi}(C) < \infty$ annehmen. Dann existiert mindestens ein Superhedge für C. Für jeden Superhedge H für C gilt

$$\beta_N V_N(H) \geq \beta_N C \geq 0.$$

Daher ist $\beta V(H)$ nach Satz 4.8 ein **universelles $I\!P$-Martingal**, d.h. $\beta V(H)$ ist ein Q-Martingal für alle $Q \in I\!P$. Die Martingaleigenschaft liefert

$$\beta_0 V_0(H) = E_Q \beta_N V_N(H) \geq E_Q(\beta_N C),$$

also

$$V_0(H) \geq E_Q(\frac{\beta_N C}{\beta_0}) \text{ für alle } Q \in I\!P.$$

Es folgt $\overline{\Pi}(C) \geq \overline{\alpha}(C)$.

Zum Nachweis der Ungleichung

$$\underline{\Pi}(C) \leq \underline{\alpha}(C) := \inf_{Q \in I\!P} E_Q(\frac{\beta_N C}{\beta_0})$$

können wir o.E. $\underline{\alpha}(C) < \infty$ annehmen, Dann gilt

$$\tilde{I\!P} := \{Q \in I\!P : E_Q(\beta_N C) < \infty\} \neq \emptyset.$$

Für jedes $H \in SF$ mit $V_N(H) \leq C$ gilt

$$0 \leq (\beta_N V_N(H))^+ \leq \beta_N C.$$

Daher ist $\beta V(H)$ nach Satz 4.8 ein universelles $\tilde{I\!P}$-Martingal. Dies liefert

$$\beta_0 V_0(H) = E_Q \beta_N V_N(H) \leq E_Q(\beta_N C),$$

also

$$V_0(H) \leq E_Q(\frac{\beta_N C}{\beta_0}) \text{ für alle } Q \in \tilde{I\!P}.$$

Es folgt $\underline{\Pi}(C) \leq \underline{\alpha}(C)$. □

D2 Satz (Preisformeln, Superhedging)
(a) Es gilt

$$\overline{\Pi}(C) = \sup_{Q \in I\!P} E_Q(\frac{\beta_N C}{\beta_0}).$$

Insbesondere ist C genau dann superhedgebar wenn $\sup_{Q\in I\!P} E_Q(\frac{\beta_N C}{\beta_0}) < \infty$ und in diesem Fall existiert ein Superhedge K für C mit $\overline{\Pi}(C) = V_0(K)$.

(b) Sei $\sup_{Q\in I\!P} E_Q(\frac{\beta_N C}{\beta_0}) < \infty$. Dann gilt

$$\underline{\Pi}(C) = \inf_{Q \in I\!P} E_Q(\frac{\beta_N C}{\beta_0})$$

und es existiert ein $U \in SF, V_N(U) \leq C$ mit $\underline{\Pi}(C) = V_0(U)$.

Der Beweis basiert auf der optionalen (oder gleichmäßigen Doob-) Zerlegung von **universellen $I\!P$-Supermartingalen**, das sind Q-Supermartingale für alle $Q \in I\!P$.

D3 Satz (Optionale Zerlegung/gleichmäßige Doob-Zerlegung) $Y = (Y_n)_{n\in I}$ sei ein positives universelles $I\!P$-Supermartingal. Dann existiert eine vorhersehbare, $I\!R^{d+1}$-wertige Folge H und eine adaptierte, reelle wachsende Folge D, $D_0 = 0$ mit

$$Y = Y_0 + H \bullet (\beta S) - D.$$

Beweis. Föllmer, Schied (2002), Theorem 7.5. □

Für den Anteil $M := Y_0 + H \bullet (\beta S)$ in obiger Zerlegung von Y gilt $M_N \geq Y_N \geq 0$ und deshalb ist M ein universelles $I\!P$-Martingal (s. Satz 2.10, 2.11). Der Martingalanteil M hat eine spezielle Struktur: er ist Martingaltransformierte von βS. Die von $Q \in I\!P$-abhängende Doob-Zerlegung von Y liefert $Y = N^{(Q)} - A^{(Q)}$, wobei $N^{(Q)}$ ein Q-Martingal ist. Andererseits ist die wachsende Folge D nur adaptiert, während die wachsende Folge $A^{(Q)}$ in der Doob-Zerlegung vorhersehbar ist.

D4 Lemma Z sei eine $\mathcal{F}_N$-meßbare $ZV, Z \geq 0$ mit $\sup_{Q\in I\!P} E_Q Z < \infty$ und

$$Y_n := \text{ess sup}_{Q\in I\!P}\ E_Q(Z \mid \mathcal{F}_n), n \in I.$$

Dann ist Y ein (positives) universelles $I\!P$-Supermartingal.

Beweis. Föllmer, Schied (2002), Corollary 7.4. □

Das essentielle Supremum der Familie $E_Q(Z \mid \mathcal{F}_n), Q \in I\!P$ ist dabei das verbandstheoretische Supremum in der Mengge der P-Äquivalenzklassen $\mathcal{F}_n$-meßbarer, $\overline{I\!R}$-wertiger ZV, d.h.

Y_n ist $\mathcal{F}_n$-meßbar,

$Y_n \geq E_Q(Z \mid \mathcal{F}_n)$ f.s. $\forall Q \in I\!P$,

für jede $\mathcal{F}_n$-meßbare ZV $\tilde{Y}_n$ mit $\tilde{Y}_n \geq E_Q(Z \mid \mathcal{F}_n)$ f.s. $\forall Q \in I\!P$ gilt $\tilde{Y}_n \geq Y_n$.

Zur Existenz des essentiellen Supremums s. Föllmer, Schied (2002), S. 385.

Beweis von Satz D2. (a) Zum Nachweis von

$$\overline{\Pi}(C) = \overline{\alpha}(C) := \sup_{Q\in I\!P} E_Q(\frac{\beta_N C}{\beta_0})$$

kann man nach Lemma D1 o.E. $\overline{\alpha}(C) < \infty$ annehmen. Definiere

$$Y_n := \text{ess sup}_{Q\in I\!P}\ E_Q(\beta_N C \mid \mathcal{F}_n), n \in I.$$

Y ist nach Lemma D4 ein (positives) universelles $I\!P$-Supermartingal. Sei

$$Y = Y_0 + H \bullet (\beta S) - D$$

die optionale Zerlegung von Y. Nach Lemma 4.9 existiert $K \in SF$ mit

$$Y_0 + H \bullet (\beta S) = \beta V(K).$$

Für Y gilt

$$Y_0 = \text{ ess sup}_{Q\in I\!P}\ E_Q(\beta_N C) = \sup_{Q\in I\!P} E_Q(\beta_N C) = \beta_0 \overline{\alpha}(C) < \infty$$

und

$$Y_N = \text{ess sup}_{Q\in I\!P}\ \beta_N C = \beta_N C.$$

Es folgt

$$\beta_N V_N(K) = Y_N + D_N = \beta_N C + D_N \geq \beta_N C,$$

also

$$V_N(K) \geq C$$

und damit

$$\overline{\Pi}(C) \leq V_0(K) = \frac{Y_0}{\beta_0} = \overline{\alpha}(C).$$

Zusammen mit Lemma D1 erhält man

$$\overline{\Pi}(C) = V_0(K) = \overline{\alpha}(C).$$

(b) Nach Teil (a) existiert ein Superhedge K für C mit

$$\overline{\alpha}(C) = V_0(K).$$

Sei

$$\underline{\alpha}(C) := \inf_{Q \in I\!P} E_Q(\frac{\beta_N C}{\beta_0}).$$

Für den Claim

$$\tilde{C} := V_N(K) - C \geq 0$$

gilt

$$\begin{aligned} E_Q(\beta_N \tilde{C}) &= E_Q \beta_N V_N(K) - E_Q(\beta_N C) \\ &= \beta_0 V_0(K) - E_Q(\beta_N C) \leq \beta_0 V_0(K) < \infty \end{aligned}$$

für alle $Q \in I\!P$, da $\beta V(K)$ ein universelles $I\!P$-Martingal ist (s. Satz 4.8). Definiere

$$\tilde{Y}_n := \text{ess sup}_{Q \in I\!P} E_Q(\beta_N \tilde{C} \mid \mathcal{F}_n), n \in I.$$

$\tilde{Y}$ ist nach Lemma D4 ein (positives) universelles $I\!P$-Supermartingal. Nach Satz D3 und Lemma 4.9 läßt sich $\tilde{Y}$ zerlegen in der Form

$$\tilde{Y} = \beta V(\tilde{K}) - \tilde{D}$$

mit $\tilde{K} \in SF$ und $\tilde{D}$ adaptiert, wachsend, $\tilde{D}_0 = 0$. Für Y gilt

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_0 &= \sup_{Q \in I\!P} E_Q(\beta_N \tilde{C}) = \beta_0 V_0(K) - \inf_{Q \in I\!P} E_Q(\beta_N C) \\ &= \beta_0(V_0(K) - \underline{\alpha}(C)) \end{aligned}$$

und

$$\tilde{Y}_N = \beta_N \tilde{C} = \beta_N V_N(K) - \beta_N C.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \beta_N C &= \beta_N V_N(K) - \tilde{Y}_N \\ &= \beta_N V_N(K) - \beta_N V_N(\tilde{K}) + \tilde{D}_N \\ &\geq \beta_N V_N(U) \end{aligned}$$

für $U := K - \tilde{K}$, also $U \in SF$ und

$$V_N(U) \leq C.$$

Man erhält

$$\begin{aligned} \underline{\Pi}(C) &\geq V_0(U) = V_0(K) - V_0(\tilde{K}) \\ &= V_0(K) - \tfrac{\tilde{Y}_0}{\beta_0} = V_0(K) - (V_0(K) - \underline{\alpha}(C)) \\ &= \underline{\alpha}(C). \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt damit aus Lemma D1. □

Es ist bekannt, daß für hedgebare Claims C die Abbildung $Q \mapsto E_Q(\frac{\beta_N C}{\beta_0})$ konstant und endlich auf $I\!P$ ist (s. Satz 4.14). Das folgende Korollar zeigt u.a., daß auch die Umkehrung gilt.

D5 Korollar Es sind äquivalent:

(i) C ist (exakt) hedgebar.

(ii) $\underline{\Pi}(C) = \overline{\Pi}(C) < \infty$.

(iii) $Q \mapsto E_Q(\frac{\beta_N C}{\beta_0})$ ist konstant und endlich auf $I\!P$.

(iv) Es gibt ein $Q \in I\!P$ mit

$$E_Q(\frac{\beta_N C}{\beta_0}) = \sup_{Q \in I\!P} E_Q(\frac{\beta_N C}{\beta_0}) < \infty.$$

(v) Es gibt ein $Q \in I\!P$ mit

$$E_Q(\frac{\beta_N C}{\beta_0}) = \inf_{Q \in I\!P} E_Q(\frac{\beta_N C}{\beta_0})$$

und

$$\sup_{Q \in I\!P} E_Q(\frac{\beta_N C}{\beta_0}) < \infty.$$

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii). Sei H ein Hedge für C. Dann gilt

$$\overline{\Pi}(C) \leq V_0(H) \leq \underline{\Pi}(C)$$

und damit

$$\overline{\Pi}(C) = \underline{\Pi}(C) = V_0(H) < \infty$$

nach Lemma D1.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) folgt sofort aus Lemma D1 (oder Satz D2) und (iii) $\Rightarrow$ (iv) ist klar.
(iv) $\Rightarrow$ (i). Nach Satz D2 existiert ein Superhedge K für C mit

$$\overline{\alpha}(C) := \sup_{Q \in I\!P} E_Q(\frac{\beta_N C}{\beta_0}) = \overline{\Pi}(C) = V_0(K).$$

Für $Q \in I\!P$ gemäß (iv) gilt wegen der Q-Martingaleigenschaft von $\beta V(K)$

$$\begin{array}{rcl} \beta_0 \overline{\alpha}(C) & = & \beta_0 V_0(K) = E_Q(\beta_N V_N(K)) \\ & \geq & E_Q(\beta_N C) = \beta_0 \overline{\alpha}(C), \end{array}$$

also

$$\beta_N V_N(K) = \beta_N C.$$

Damit ist K ein (exakter) Hedge für C.

(iii) $\Rightarrow$ (v) ist klar
(v) $\Rightarrow$ (i). Nach Satz D2 existiert ein $U \in SF$, $V_N(U) \leq C$ mit

$$\underline{\alpha}(C) := \inf_{Q \in I\!P} E_Q(\frac{\beta_N C}{\beta_0}) = \underline{\Pi}(C) = V_0(U).$$

Wähle $Q \in I\!P$ gemäß (v). Wegen $0 \leq (\beta_N V_N(U))^+ \leq \beta_N C$ ist $\beta V(U)$ ein Q-Martingal. Es folgt

$$\begin{array}{rcl} \beta_0 \underline{\alpha}(C) & = & \beta_0 V_0(U) = E_Q \beta_N V_N(U) \\ & \leq & E_Q(\beta_N C) = \beta_0 \underline{\alpha}(C), \end{array}$$

also

$$\beta_N V_N(U) = \beta_N C.$$

Damit ist U ein Hedge für C. $\square$

D6 Bemerkung C sei ein Claim und

$$\Phi(C) := \{E_Q(\frac{\beta_N C}{\beta_0}) : Q \in I\!P\} \cap I\!R_+.$$

Wegen der Konvexität von $I\!P$ (s. Satz 4.7) ist $\Phi(C)$ ein Intervall in $I\!R_+$. (Eventuell $\Phi(C) = \emptyset$.) Falls C hedgebar ist, gilt $\mid \Phi(C) \mid = 1$. Falls C nicht hedgebar ist und $\sup_{Q \in I\!P} E_Q(\frac{\beta_N C}{\beta_0}) < \infty$, so gilt $\underline{\Pi}(C) < \overline{\Pi}(C) < \infty$ und

$$\Phi(C) = (\underline{\Pi}(C), \overline{\Pi}(C)).$$

Insbesondere ist $\Phi(C)$ dann offen. Dies folgt aus Satz D2 und Korollar D5.

Schließlich stimmt $\Phi(C)$ mit den arbitragefreien Preisen für C überein. Dabei heißt $x \in I\!R_+$ **arbitragefreier Preis für** C, falls es einen (reellen) adaptierten Prozeß S^{d+1} mit

$$\begin{array}{rcll} S_0^{d+1} & = & x, & \\ S_n^{d+1} & \geq & 0 & \forall n \in I, \\ S_N^{d+1} & = & C & \end{array}$$

gibt und der um S^{d+1} erweiterte Markt $(S^0, S^1, \ldots, S^{d+1})$ arbitragefrei ist:
Für $x = E_Q(\frac{\beta_N C}{\beta_0}) \in \Phi(C)$ definiere

$$S_n^{d+1} := E_Q(\frac{\beta_N C}{\beta_N} \mid \mathcal{F}_n), n \in I.$$

Damit ist x offenbar ein arbitragefreier Preis für C. Wenn umgekehrt $x \in I\!R_+$ ein arbitragefreier Preis ist, existiert nach Satz 4.10 ein äquivalentes Martingalmaß Q für das Marktmodell $(S^0, S^1, \ldots, S^{d+1})$. Es gilt $Q \in I\!P$ und

$$\beta_0 x = \beta_0 S_0^{d+1} = E_Q(\beta_N S_N^{d+1}) = E_Q(\beta_N C),$$

also $x \in \Phi(C)$.