Exkurs B: Projektive Limiten von W-Maßen

Es sei Ω eine beliebige Menge und $\mathcal{P}(\Omega)$ deren Potenzmenge. Ein Mengensystem $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ heißt **Semiring** (Halbring), falls
(i) $\emptyset \in \mathcal{E}$,
(ii) $A, B \in \mathcal{E}, A \subset B \Rightarrow \exists C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{E}$ paarweise disjunkt mit $B \setminus A = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$,
(iii) $A, B \in \mathcal{E} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{E}$.
$\mathcal{E}$ heiß **Ring**, falls
(i) $\emptyset \in \mathcal{E}$,
(ii) $A, B \in \mathcal{E} \Rightarrow B \setminus A \in \mathcal{E}$,
(iii) $A, B \in \mathcal{E} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{E}$

Ein Ring ist ein Semiring, da für $A, B \in \mathcal{E}$ gilt:

$$A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathcal{E}.$$

Eine Funktion:

$$\mu : \mathcal{E} \to I\!R_+$$

auf einem Semiring $\mathcal{E}$ heißt **endlich additiv**, falls
(i) $\mu(\emptyset) = 0$,
(ii) $\mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{1}^{n} \mu(A_i)\ \forall A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{E}$ paarweise disjunkt mit $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{E}$,
σ**-additiv**, falls (i) und
(iii) $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)\ \forall$ Folgen $(A_i)_i$ paaarweise disjunkter Mengen aus $\mathcal{E}$ mit $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{E}$
und σ**-endlich** falls
(iv) $\exists A_i \in \mathcal{E}, i \in I\!N$ mit $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$.

Für ein weiters System $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ heißt $\mu : \mathcal{E} \to I\!R_+$ **von innen $\mathcal{K}$-approximierbar**, falls

$$\forall A \in \mathcal{E}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists K \in \mathcal{K}, B \in \mathcal{E} \text{ mit}$$
$$B \subset K \subset A \,\text{und}\, \mu(A) - \mu(B) \leq \varepsilon.$$

Diese Approximationseigenschaft ist besonders interessant wenn $\mathcal{K}$ ein kompaktes System ist. Ein System $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ heißt **kompaktes System**, falls

$$K_n \in \mathcal{K}, n \in I\!N, \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \emptyset \Rightarrow \exists k \in I\!N \text{ mit } \bigcap_{n=1}^{k} K_n = \emptyset$$

Das System der kompakten Teimengen von $\Omega = I\!R^n$ ist z.B. ein kompaktes System.

Wir kommen nun zur Existenz und Eindeutigkeit projektiver Limiten. Im folgenden seien

- $(\Omega_\alpha, \mathcal{A}_\alpha, P_\alpha), \alpha \in \Gamma$ W-Räume, wobei Γ eine beliebige Indexmenge bezeichnet,

- Ω eine beliebige Menge,

- $f_\alpha : \Omega \to \Omega_\alpha$,

- $\mathcal{A} := \sigma(f_\alpha, \alpha \in \Gamma)$.

Ein **projektiver Limes** von $(P_\alpha, f_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ ist ein W-Maß Q auf $(\Omega, \mathcal{A})$ mit

$$Q^{f_\alpha} = P_\alpha \ \forall \alpha \in \Gamma.$$

B 1 Satz (Projektiver Limes)
$\mathcal{E}_\alpha \subset \mathcal{P}(\Omega_\alpha)$ sei ein Semiring mit $\sigma(\mathcal{E}_\alpha) = \mathcal{A}_\alpha$ und $\mathcal{K}_\alpha \subset \mathcal{P}(\Omega_\alpha)$ sei ein beliebiges Mengensystem, $\alpha \in \Gamma$. Ferner sei $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ein kompaktes System.

(i) (Konsistenzbedingung)

$$P_\alpha(A) = P_\beta(B) \ \forall A \in \mathcal{A}_\alpha \ \forall B \in \mathcal{A}_\beta \text{ mit } f_\alpha^{-1}(A) = f_\beta^{-1}(B).$$

(ii) $P_\alpha \mid \mathcal{E}_\alpha$ ist von innen $\mathcal{K}_\alpha$-approximierbar und σ-endlich $\forall \alpha \in \Gamma$.
(iii) $f_\alpha^{-1}(\mathcal{K}_\alpha) \subset \mathcal{K} \ \forall \alpha \in \Gamma$.
(iv) $\forall \alpha, \beta \in \Gamma \ \exists \gamma \in \Gamma$ mit $f_\alpha^{-1}(\mathcal{E}_\alpha) \cup f_\beta^{-1}(\mathcal{E}_\beta) \subset f_\gamma^{-1}(\mathcal{E}_\gamma)$.

Dann existiert genau ein projektiver Limes von $(P_\alpha, f_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$.

Die Konsistentbedingung (i) ist offenbar notwendig für die Existenz projektiver Limiten:

$$P_\alpha(A) = Q(f_\alpha^{-1}(A)) = Q(f_\beta^{-1}(B)) = P_\beta(B).$$

Unter (i) heißt $(P_\alpha, f_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ auch **projektiv**.
Das folgende Lemma beschreibt einen zentralen Schritt im Beweis von Satz C1.

B2 Lemma $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ sei ein Semiring und $\mu : \mathcal{E} \to I\!R_+$ sei endlich additiv (und endlich). Ferner sei μ von innen $\mathcal{K}$-approximierbar für ein kompaktes System $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Dann ist μ σ-additiv.

Beweis. Zunächst nehmen wir an, daß $\mathcal{E}$ ein Ring ist. Es genügt dann zu zeigen, daß μ stetig in $\emptyset$ ist. Dazu sei $(A_n)_n$ eine Folge in $\mathcal{E}$ mit $A_n \downarrow \emptyset$ und $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung existieren $K_n \in \mathcal{K}$ und $B_n \in \mathcal{E}$ mit

$$B_n \subset K_n \subset A_n$$

und

$$\mu(A_n \setminus B_n) = \mu(A_n) - \mu(B_n) \le \varepsilon 2^{-n} \ \forall n.$$

Es folgt

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$$

und damit

$$\bigcap_{n=1}^{k} K_n = \emptyset \text{ für ein } k \in I\!N.$$

Dies liefert

$$\bigcap_{n=1}^{k} B_n = \emptyset$$

und für $n \geq k$

$$A_n = A_n \cap (\bigcap_{j=1}^{k} B_j)^c = \bigcup_{j=1}^{k} (A_n \setminus B_j) \subset \bigcup_{j=1}^{k} (A_j \setminus B_j),$$

also

$$\mu(A_n) \leq \sum_{j=1}^{k} \mu(A_j \setminus B_j) \leq \varepsilon \sum_{j=1}^{k} 2^{-j} \leq \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, erhält man $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$.

Nun sei $\mathcal{E}$ ein Semiring. Für Semiringe impliziert die Stetigkeit in $\emptyset$ nicht die σ-Additivität einer endlich additiven (endlichen) Mengenfunktion. Deshalb wird μ auf den von $\mathcal{E}$ erzeugten Ring $\rho(\mathcal{E})$ fortgesetzt. Es gilt

$$\rho(\mathcal{E}) = \{\bigcup_{i=1}^{n} A_i : n \in I\!N, A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{E} \text{ paarweise disjunkt}\}$$

und durch

$$\nu(\bigcup_{1}^{n} A_i) := \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$$

wird eine endlich additive Funktion $\nu : \rho(\mathcal{E}) \to I\!R_+$ mit $\nu \mid \mathcal{E} = \mu$ definiert. Die Funktion ν ist von innen $\mathcal{K}_0$-approximierbar für

$$\mathcal{K}_0 := \{\bigcup_{i=1}^{n} K_i : n \in I\!N, K_1, \ldots, K_n \in \mathcal{K}\}.$$

Man hat dazu nur $\bigcup_{1}^{n} A_i \setminus (\bigcup_{i=1}^{n} B_i) \subset \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \setminus B_i)$ zu beachten. Da $\mathcal{K}_0$ auch ein kompaktes System ist (s. Gänssler, Stute (1977), S. 30), folgt die σ-Additivität von ν und damit von μ wie oben. $\square$

Beweis von Satz B1. Da $\mathcal{E}_\alpha$ ein Semiring auf Ω_α und damit $f_\alpha^{-1}(\mathcal{E}_\alpha)$ ein Semiring auf Ω ist, $\alpha \in \Gamma$, ist nach (iv) offensichtlich auch

$$\mathcal{E} := \bigcup_{\alpha\in\Gamma} f_\alpha^{-1}(\mathcal{E}_\alpha)$$

ein Semiring auf Ω. Aus

$$f_\alpha^{-1}(\mathcal{A}_\alpha) = f_\alpha^{-1}(\sigma(\mathcal{E}_\alpha)) = \sigma(f_\alpha^{-1}(\mathcal{E}_\alpha)) \subset \sigma(\mathcal{E}), \alpha \in \Gamma$$

folgt

$$\mathcal{A} = \sigma(f_\alpha, \alpha \in \Gamma) = \sigma(\bigcup_{\alpha\in\Gamma} f_\alpha^{-1}(\mathcal{A}_\alpha)) \subset \sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A},$$

also

$$\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E}).$$

Wir definieren

$$\mu : \mathcal{E} \to [0, 1]$$

durch

$$\mu(E) := P_\alpha(A) \text{ falls } E = f_\alpha^{-1}(A) \text{ mit } \alpha \in \Gamma, A \in \mathcal{E}_\alpha.$$

Die Konsistenzbedingung (i) stellt sicher, daß μ wohldefiniert ist.

Wir zeigen zunächst, daß μ endlich additiv ist. Offenbar gilt

$$\mu(\emptyset) = \mu(f_\alpha^{-1}(\emptyset)) = P_\alpha(\emptyset) = 0.$$

Für paarweise disjunkte Mengen $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{E}$ mit $\bigcup\limits_{i=1}^n E_i \in \mathcal{E}$ existiert nach (iv) ein $\alpha \in \Gamma$ mit $E_1, \ldots, E_n, \bigcup\limits_{i=1}^n E_i \in f_\alpha^{-1}(\mathcal{E}_\alpha)$. Es gilt also $E_i = f_\alpha^{-1}(A_i)$ und $\bigcup\limits_{i=1}^n E_i = f_\alpha^{-1}(A)$ mit Mengen $A_1, \ldots, A_n, A \in \mathcal{E}_\alpha$. Aus

$$f_\alpha^{-1}(\emptyset) = \emptyset = E_i \cap E_j = f_\alpha^{-1}(A_i \cap A_j) \text{ für } i \neq j,$$

$$f_\alpha^{-1}(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \bigcup_{i=1}^n f_\alpha^{-1}(A_i) = \bigcup_{i=1}^n E_i = f_\alpha^{-1}(A),$$

$$A_i \cap A_j \in \mathcal{E}_\alpha \subset \mathcal{A}_\alpha, \bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}_\alpha$$

folgt mit (i)

$$P_\alpha(A) = P_\alpha(\bigcup_{i=1}^n A_i),$$

$$P_\alpha(A_i \cap A_j) = P_\alpha(\emptyset) = 0 \text{ für } i \neq j,$$

also

$$P_\alpha(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P_\alpha(A_i)$$

und damit

$$\mu(\bigcup_{i=1}^n E_i) = P_\alpha(A) = \sum_{i=1}^n P_\alpha(A_i) = \sum_{i=1}^n \mu(E_i).$$

Ferner ist μ von innen $\mathcal{K}$-approximierbar. Zum Nachweis dieser Approximationseigenschaft sei $E \in \mathcal{E}$ und $\varepsilon > 0$. Es gilt $E = f_\alpha^{-1}(A)$ mit $A \in \mathcal{E}_\alpha$ für ein $\alpha \in \Gamma$. Nach (ii) existieren $C \in \mathcal{K}_\alpha$ und $B \in \mathcal{E}_\alpha$ mit $B \subset C \subset A$ und

$$P_\alpha(A \setminus B) = P_\alpha(A) - P_\alpha(B) \leq \varepsilon.$$

Es folgt

$$F := f_\alpha^{-1}(B) \subset K := f_\alpha^{-1}(C) \subset E = f_\alpha^{-1}(A),$$

wobei $F \in \mathcal{E}, K \in \mathcal{K}$ nach (iii), und

$$\mu(E) - \mu(F) = P_\alpha(A) - P_\alpha(B) \leq \varepsilon.$$

Nach Voraussetzung ist $\mathcal{K}$ ein kompaktes System. Daher ist μ σ-additiv nach Lemma B2. Aus dem Fortsetzungssatz von Carathéodory folgt die Existenz eines Maßes Q auf $(\Omega, \mathcal{A})$ mit

$$Q \mid \mathcal{E} = \mu$$

Für Q gilt

$$Q^{f_\alpha}(A) = Q(f_\alpha^{-1}(A)) = \mu(f_\alpha^{-1}(A)) = P_\alpha(A), A \in \mathcal{E}_\alpha,$$

also

$$Q^{f_\alpha} \mid \mathcal{E}_\alpha = P_\alpha \mid \mathcal{E}_\alpha \quad \forall \alpha \in \Gamma.$$

Da $\mathcal{E}_\alpha$ durchschnittsstabil und $P_\alpha \mid \mathcal{E}_\alpha$ nach (ii) σ-endlich ist, erhält man

$$Q^{f_\alpha} = P_\alpha \quad \forall \alpha \in \Gamma$$

nach einem bekannten Eindeutigkeitssatz. Insbesondere ist Q ein W-Maß. Für einen weiteren projektiven Limes Q_1 gilt

$$Q_1 \mid \mathcal{E} = Q \mid \mathcal{E}$$

und somit, wieder nach dem genannen Eindeutigkeitssatz, $Q = Q_1$. □

Für die Theorie stochastischer Prozesse ist folgende Anwendung wichtig. Es seien

- I eine nichtleere Indexmenge, $\Gamma := \{\alpha \subset I : \alpha \neq \emptyset, \alpha \text{ endlich }\}$,

- $(I\!R^\alpha, \mathcal{B}(I\!R^\alpha), P_\alpha), \alpha \in \Gamma$ W-Räume, wobei $\mathcal{B}(I\!R^\alpha)$ die Borelsche σ-Algebra auf $I\!R^\alpha$ bezeichnet,

- $\pi_\alpha : I\!R^I = \Pi_{t \in I} I\!R \to I\!R^\alpha, \pi_\alpha(x) := x \mid \alpha,\ \alpha \in \Gamma$ (Projektion),

- $\pi_{\alpha,\beta} : I\!R^\beta \to I\!R^\alpha, \pi_{\alpha,\beta}(x) := x \mid \alpha,\ \alpha, \beta \in \Gamma, \alpha \subset \beta$,

- $\mathcal{B}(I\!R)^I := \sigma(\pi_t, t \in I)$ mit $\pi_t := \pi_{\{t\}}$.

B3 Satz (Kolmogorov)
$(P_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$ sei projektiv, d.h.

$$P_\alpha = P_\beta^{\pi_{\alpha,\beta}} \quad \forall \alpha, \beta \in \Gamma, \alpha \subset \beta.$$

Dann existiert genau ein W-Maß Q auf $(I\!R^I, \mathcal{B}(I\!R)^I)$ mit

$$Q^{\pi_\alpha} = P_\alpha \quad \forall \alpha \in \Gamma.$$

Beweis. Man setze in Satz B1

$$(\Omega_\alpha, A_\alpha) = (I\!R^\alpha, \mathcal{B}(I\!R^\alpha)), (\Omega, \mathcal{A}) = (I\!R^I, \mathcal{B}(I\!R)^I), f_\alpha = \pi_\alpha$$

und z.B.

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_\alpha &= \{\Pi_{t \in \alpha} C_t : C_t \in \mathcal{C}\ \forall t \in \alpha\}, \\ \mathcal{K} &= \{\Pi_{t \in I} C_t : C_t \in \mathcal{C}\ \forall t \in \alpha\} \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} &\mathcal{C} := \{I\!R, \emptyset\} \cup \{[a,b] : a, b \in I\!R, a \leq b\}, \\ &\mathcal{E}_\alpha = \{\Pi_{t \in \alpha} G_t : G_t \in \mathcal{G}\ \forall t \in \alpha\} \end{aligned}$$

mit

$$\mathcal{G} := \{I\!R\} \cup \{(a,b] : a, b \in I\!R, a \leq b\}.$$

Die Konsistenzbedingung (i) folgt aus der Gleichung

$$\pi_\alpha = \pi_{\alpha,\gamma} \circ \pi_\gamma \text{ für } \alpha, \gamma \in \Gamma, \alpha \subset \gamma.$$

Dazu sei $\pi_\alpha^{-1}(A) = \pi_\beta^{-1}(B)$ mit $\alpha, \beta \in \Gamma$, $A \in \mathcal{B}(I\!R^\alpha), B \in \mathcal{B}(I\!R^\beta)$. Setze $\gamma := \alpha \cup \beta$. Wegen

$$\pi_\gamma^{-1}(\pi_{\alpha,\gamma}^{-1}(A)) = \pi_\alpha^{-1}(A) = \pi_\beta^{-1}(B) = \pi_\gamma^{-1}(\pi_{\beta,\gamma}^{-1}(B))$$

und der Surjektivität von π_γ gilt

$$\pi_{\alpha,\gamma}^{-1}(A) = \pi_{\beta,\gamma}^{-1}(B),$$

also

$$P_\alpha(A) = P_\gamma^{\pi_{\alpha,\gamma}}(A) = P_\gamma^{\pi_{\beta,\gamma}}(B) = P_\beta(B).$$

Es ist (ziemlich) offensichtlich, dass die restlichen Voraussezungen von Satz B1 gelten. Dabei ist $I\!R \in \mathcal{C}$ für die Bedingung (iii) und $I\!R \in \mathcal{G}$ für die Bedingung (iv) nötig. $\square$