Exkurs B: Martingalkonvergenz

Es sei $I = \mathbb{N}_0, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ eine Filtration und $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\bigcup\limits_{n\geq 0} \mathcal{F}_n)$.

Satz B.1 (Doob) $X = (X_n)_{n\geq 0}$ sei ein $\mathbb{F}$-Submartingal mit $\sup_{n\geq 0} \mathbb{E}X_n^+ < \infty$. Dann existiert eine $\mathcal{F}_\infty$-meßbare Zufallsvariable $X_\infty \in \mathscr{L}^1$ mit

$$X_n \to X_\infty \text{ f.s.}$$

Beweis. Wegen $|X_n| = X_n^+ + X_n^- = 2X_n^+ - X_n$ gilt $E|X_n| = 2EX_n^+ - EX_n \leq 2EX_n^+ - EX_0$ und somit $\sup_{n\geq 0} E|X_n| < \infty$. Das Submartingal X ist also $\mathscr{L}^1$-beschränkt. Für

$$B := \{\lim_{n\to\infty} X_n \text{ existiert in } \mathbb{R}\}$$

gilt $B \in \mathcal{F}_\infty$. Es reicht $P(B) = 1$ zu zeigen, denn

$$X_\infty(\omega) := \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} X_n(\omega) & , \quad \omega \in B \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

ist dann eine reelle $\mathcal{F}_\infty$-meßbare Zufallsvariable mit $X_n \to X_\infty$ f.s. und

$$\begin{aligned} E|X_\infty| &= E \lim_{n\to\infty} |X_n| \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} E|X_n| \leq \sup_{n\geq 0} E|X_n| < \infty. \end{aligned}$$

1. X sei ein $\mathscr{L}^2$-beschränktes Martingal. Nach 1.5 b) gilt für jedes n mit $C := \sup_{n\geq 0} EX_n^2$

$$EX_0^2 + \sum_{j=1}^n E(\triangle X_j)^2 = EX_n^2 \leq C$$

und daher

$$\sum_{j=1}^\infty E(\triangle X_j)^2 \leq C < \infty.$$

Für $m \in \mathbb{N}_0$ sei $V_m := \sup_{j,k\geq m} |X_j - X_k|$ und $Y_k = Y_k^{(m)} := X_{k+m} - X_m, k \geq 0$. Die Folge $Y^{(m)}$ ist ein $\mathbb{F}^{(m)}$-Martingal mit $\mathbb{F}^{(m)} := (\mathcal{F}_{k+m})_{k\geq 0}$. Die Doob-Ungleichung 2.12 a) liefert für $\varepsilon > 0$

$$P(\sup_{0\leq k\leq n} |Y_k| > \varepsilon/2) \leq \frac{4}{\varepsilon^2} EY_n^2 = \frac{4}{\varepsilon^2} \sum_{j=m+1}^{m+n} E(\triangle X_j)^2$$

und damit

$$\begin{aligned} P(V_m > \varepsilon) &\leq P(\sup_{j\geq m} |X_j - X_m| > \varepsilon/2) \\ &= P(\sup_{k\geq 0} |Y_k^{(m)}| > \varepsilon/2) \\ &\leq \tfrac{4}{\varepsilon^2} \textstyle\sum_{j=m+1}^\infty E(\triangle X_j)^2 \to 0, m \to \infty. \end{aligned}$$

Dies impliziert $V_m \xrightarrow{P} 0$ (stochastisch). Da $(V_m)_m$ monoton fallend ist, folgt $V_m \to 0$. f.s. und daher $P(B) = P(\{(X_n)_n \text{ ist Cauchy-Folge in } \mathbb{R}\}) = 1$.

2. X sei ein positives $\mathscr{L}^2$-beschränktes Submartingal. Sei $X = M + A$ die Doob-Zerlegung von X und $A_\infty := \sup_{n\geq 0} A_n$. Man beachte, dass die vorhersehbare Folge A nach 1.13 wachsend ist. Es gilt mit $C := \sup_{n\geq 0} EX_n^2$

$$EA_n = EX_n - EM_n = EX_n - EM_0 = EX_n - EX_0 \leq EX_n \leq \sqrt{EX_n^2} \leq \sqrt{C}$$

und damit nach dem Satz von der monotonen Konvergenz

$$EA_\infty = \sup_{n\geq 0} EA_n \leq \sqrt{C} < \infty.$$

Es folgt $A_\infty < \infty$ f.s. Man erhält also

$$P(\{\lim_{n\to\infty} A_n \text{ existiert in } \mathbb{R}\}) = 1.$$

Ferner ist M ein $\mathscr{L}^2$-beschränktes Martingal, denn wegen

$$\begin{aligned} E(\triangle M_n)^2 &= E(X_n - E(X_n|\mathcal{F}_{n-1}))^2 \\ &= EX_n^2 - E(E(X_n|\mathcal{F}_{n-1}))^2 \\ &\leq EX_n^2 - EX_{n-1}^2 < \infty, n \geq 1 \end{aligned}$$

und $M_0 = X_0 \in \mathscr{L}^2$ ist M ein $\mathscr{L}^2$-Martingal und nach 1.5 b)

$$EM_n^2 = EX_0^2 + \sum_{j=1}^n E(\triangle M_j)^2 \leq EX_0^2 + \sum_{j=1}^n (EX_j^2 - EX_{j-1}^2) = EX_n^2 \leq C < \infty.$$

Aus 1. folgt

$$P(\{\lim_{n\to\infty} M_n \text{ existiert in } \mathbb{R}\}) = 1$$

und damit $P(B) = 1$.

3. X sei ein positives Supermartingal. Nach 1.4 ist $Y_n := e^{-X_n}, n \geq 0$ ein Submartingal. Y ist positiv und beschränkt, insbesondere also $\mathscr{L}^2$-beschränkt. Aus 2. folgt

$$P(\{\lim_{n\to\infty} X_n \text{ existiert in } \overline{\mathbb{R}}_+\}) = 1.$$

Nach dem Fatou-Lemma gilt

$$E \liminf_{n\to\infty} X_n \leq \liminf_{n\to\infty} EX_n \leq EX_0 < \infty$$

und damit folgt $\liminf X_n < \infty$ f.s. Es folgt $P(B) = 1$.

4. Nun sei X ein Submartingal mit $\sup_{n\geq 0} EX_n^+ < \infty$. Sei

$$X^+ = M + A$$

die Doob-Zerlegung des (positiven) Submartingals $X^+ = (X_n^+)_{n\geq 0}$. Nach 1.13 ist die vorhersehbare Folge A wachsend. Für $A_\infty := \sup_{n\geq 0} A_n$ gilt

$$\begin{aligned} EA_\infty &= \sup_{n\geq 1} EA_n = \sup_{n\geq 0}(EX_n^+ - EM_0) \\ &\leq \sup_{n\geq 0} EX_n^+ + E|M_0| < \infty. \end{aligned}$$

Definiere ein $\mathbb{F}$-Martingal Y durch

$$Y_n := M_n + E(A_\infty|\mathcal{F}_n), n \geq 0.$$

Wegen $Y_n \geq M_n + A_n = X_n^+ \geq X_n$ ist Y positiv und $Z := Y - X$ ein positives Supermartingal. Offensichtlich gilt

$$X = Y - Z.$$

(Dies ist die sogenannte Krickeberg-Zerlegung von X.) Aus 3. folgt $P(B) = 1$. $\square$

Die Aussage von Satz B.1 gilt ebenso für Supermartingale X mit $\sup_{n\geq 0} EX_n^- < \infty$, denn $-X$ ist dann ein Submartingal mit $\sup_{n\geq 0} E(-X_n)^+ = \sup_{n\geq 0} EX_n^- < \infty$. Insbesondere ist jedes positive Supermartingal f.s. konvergent.

Das Problem der $\mathscr{L}^1$-Konvergenz für Martingale wird durch den folgenden Satz gelöst.

Satz B.2 X sei ein $I\!\!F$-Martingal mit $\sup_{n\geq 0} I\!\!E X_n^+ < \infty$. Nach B.1 gilt also $X_n \to X_\infty$ f.s. mit $X_\infty \in \mathscr{L}^1$. Es sind äquivalent:
(i) $\{X_n : n \geq 0\}$ ist gleichgradig integrierbar.
(ii) $X_n \stackrel{\mathscr{L}^1}{\to} X_\infty$
(iii) $X_n = E(X_\infty|\mathcal{F}_n), n \geq 0$.

Beweis. (i) $\Leftrightarrow$ (ii) ist Konsequenz eines allgemeinen Resultats (s. WT II).

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Für $k \geq n$ gilt nach der Jensen-Ungleichung für bedingte Erwartungswerte

$$\begin{aligned} E|E(X_\infty|\mathcal{F}_n) - X_n| &= E|E(X_\infty|\mathcal{F}_n) - E(Y_k|\mathcal{F}_n)| \\ &\leq EE(|X_\infty - X_k||\mathcal{F}_n) \\ &= E|X_\infty - X_k| \to 0, k \to \infty. \end{aligned}$$

(iii) $\Rightarrow$ (i). Zu $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit

$$P(F) \leq \delta, F \in \mathcal{F} \Rightarrow \int_F |X_\infty| dP \leq \varepsilon.$$

Wähle $a > 0$ mit $E|X_\infty| \leq a\delta$. Aus der Markov-Ungleichung und der Jensen-Ungleichung folgt

$$\begin{aligned} P(|X_n| > a) &\leq \tfrac{1}{a} E|X_n| \\ &\leq \tfrac{1}{a} EE(|X_\infty||\mathcal{F}_n) \\ &= \tfrac{E|X_\infty|}{a} \leq \delta \end{aligned}$$

und daher

$$\int_{\{|X_n|>a\}} |X_n| dP \leq \int_{\{|X_n|>a\}} E(|X_\infty||\mathcal{F}_n) = \int_{\{|X_n|>a\}} |X_\infty| dP \leq \varepsilon$$

für alle $n \geq 0$. $\square$

Korollar B.3 Sei $Z \in \mathscr{L}^1$ und $X_n = E(Z|\mathcal{F}_n), n \geq 0$. Dann gilt

$$X_n \to E(Z|\mathcal{F}_\infty) \text{ f.s. und in } \mathscr{L}^1.$$

Beweis. Nach 1.6 ist X ein $I\!\!F$-Martingal. Wegen $E|X_n| \leq E|Z|$ ist $X \mathscr{L}^1$-beschränkt. Ferner ist $\{X_n : n \geq 0\}$ gleichgradig integrierbar (s. Beweis von B.2, (iii) $\Rightarrow$ (i)). Nach B.1 und B.2 existiert eine $\mathcal{F}_\infty$-meßbare Zufallsvariable $X_\infty \in \mathscr{L}^1$ mit

$$X_n \to X_\infty \text{ f.s. und in } \mathscr{L}^1$$

und $X_n = E(X_\infty|\mathcal{F}_n), n \geq 0$. Das System $\mathcal{E} := \bigcup\limits_{n\geq 0} \mathcal{F}_n$ ist ein $\cap$-stabiler Erzeuger von $\mathcal{F}_\infty$ mit $\Omega \in \mathcal{E}$. Für $F \in \mathcal{E}$, also $F \in \mathcal{F}_n$ für ein $n \geq 0$, gilt

$$\begin{aligned} \textstyle\int_F X_\infty dP &= \textstyle\int_F E(X_\infty|\mathcal{F}_n) dP = \int_F X_n dP \\ &= \textstyle\int_F E(Z|\mathcal{F}_n) dP = \int_F Z dP \end{aligned}$$

und damit (Dynkin-Argument) $X_\infty = E(Z|\mathcal{F}_\infty)$ f.s. $\square$

Bemerkung B.4 Das positive Martingal X aus Aufgabe 1 erfüllt $X_n \to 0$ f.s. und $EX_n = 1$ für alle $n \geq 0$. Dieses Martingal ist also nicht $\mathscr{L}^1$-konvergent und damit nicht gleichgradig integrierbar.