

SP I

Exkurs B: Gleichgradige Integrierbarkeit

Die fast sichere Konvergenz einer Folge von ZV impliziert im allgemeinen nicht deren \mathcal{L}^1 -Konvergenz. \mathcal{L}^1 -Konvergenz gilt für genau die fast sicher oder auch nur stochastisch konvergenten Folgen, die "gleichgradig integrierbar" sind.

(Ω, \mathcal{F}, P) sei ein W-Raum.

B1 Definition $B \subset \mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1(P)$ heißt gleichgradig integrierbar (g.i.), falls

$$\sup_{Y \in B} E|Y|1_{\{|Y|>a\}} \rightarrow 0, a \rightarrow \infty.$$

Gleichgradig integrierbare Mengen heißen bisweilen auch gleichmäßig integrierbar. Die gleichgradige Integrierbarkeit einer Teilmenge B von \mathcal{L}^1 ist eine Kompaktheitseigenschaft: B ist relativ $\sigma(L^1, L^\infty)$ -kompakt.

B2 Beispiel (a) \mathcal{L}^1 -majorisierte Mengen sind g.i., also $|Y| \leq Z \in \mathcal{L}^1$ für alle $Y \in B \Rightarrow B$ ist g.i.:

$$|Y|1_{\{|Y|>a\}} \leq Z1_{\{Z>a\}} \rightarrow 0 \text{ punktweise}$$

und daher

$$\sup_{Y \in B} E|Y|1_{\{|Y|>a\}} \leq EZ1_{\{Z>a\}} \rightarrow 0, a \rightarrow \infty$$

nach dem Satz von der dominierten Konvergenz.

(b) $B \subset \mathcal{L}^1$ endlich $\Rightarrow B$ ist g.i. Dies folgt aus (a).

(c) $B \subset \mathcal{L}^1$ sei \mathcal{L}^p -beschränkt für ein $p > 1$, d.h. $\sup_{Y \in B} E|Y|^p < \infty \Rightarrow B$ g.i.:

Sei $c = \sup_{Y \in B} E|Y|^p$ und $\varepsilon > 0$. Wähle $a > 0$ mit $t^p \geq ct/\varepsilon$ für alle $t > a$. Dann gilt

$$E|Y|1_{\{|Y|>a\}} \leq \frac{\varepsilon}{c} E|Y|^p 1_{\{|Y|>a\}} \leq \frac{\varepsilon}{c} c = \varepsilon$$

für alle $Y \in B$. □

Die gleichgradige Integrierbarkeit läßt sich wie folgt charakterisieren.

B3 Lemma $B \subset \mathcal{L}^1$ ist genau dann g.i., wenn B die beiden folgenden Eigenschaften hat:

(i) $\sup_{Y \in B} E|Y| < \infty$, d.h. B ist \mathcal{L}^1 - beschränkt

und

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ mit

$$P(F) \leq \delta, F \in \mathcal{F} \Rightarrow \sup_{Y \in B} \int_F |Y| dP \leq \varepsilon$$

d.h. die Menge der endlichen Maße $\{|Y|P : Y \in B\}$ ist gleichmäßig P-absolut stetig.

Beweis. Bauer (1992), Maß- und Integrationstheorie, S.140, 146. \square

Die \mathcal{L}^1 -Beschränktheit ist also eine notwendige Bedingung und die \mathcal{L}^p -Beschränktheit für ein $p > 1$ eine hinreichende Bedingung für die gleichgradige Integrierbarkeit.

Das \mathcal{L}^p -Konvergenzproblem für stochastisch konvergente Folgen wird durch folgenden Satz gelöst.

B4 Satz $(X_n)_{n \geq 0}$ sei eine \mathcal{L}^p -Folge, $1 \leq p < \infty$, und Y eine reelle ZV mit $X_n \rightarrow Y$ P-stochastisch. Dann sind äquivalent :

(i) $\{|X_n|^p : n \in \mathbb{N}_0\}$ ist g.i.

(ii) $Y \in \mathcal{L}^p$ und $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} Y$.

(iii) $Y \in \mathcal{L}^p$ und $E|X_n|^p \rightarrow E|Y|^p$.

Ferner folgt aus jeder dieser äquivalenten Bedingungen

$$EX_n \rightarrow EY.$$

Beweis. Bauer (1992), S. 144 - 146. \square

Das Lemma von Fatou hat eine sehr allgemeine Version.

B5 Satz (Fatou) $(X_n)_{n \geq 0}$ sei eine Folge von ZV.

(a) $\liminf X_n$ sei quasi-integrierbar und $\{X_n^- : n \in \mathbb{N}_0\}$ sei g.i. Dann gilt

$$E \liminf X_n \leq \liminf EX_n$$

(b) $\limsup X_n$ sei quasi-integrierbar und $\{X_n^+ : n \in \mathbb{N}_0\}$ sei g.i. Dann gilt

$$\limsup EX_n \leq E \limsup X_n.$$

Beweis. Hoffmann- Jørgensen I (1994), S. 189. \square

Für Martingaltheorie ist interessant:

B6 Satz Für $Z \in \mathcal{L}^1$ ist

$$B = \{E(Z|\mathcal{G}) : \mathcal{G} \subset \mathcal{F} \text{ Unter-}\sigma\text{-Algebra}\} \text{ g.i.}$$

Beweis. Wegen $|Z|P \ll P$ ($|Z|P$ ist das endliche Maß mit P -Dichte $|Z|$) existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$P(F) \leq \delta, F \in \mathcal{F} \Rightarrow \int_F |Z| dP \leq \varepsilon.$$

Wähle $a > 0$ mit $E|Z| \leq a\delta$. Aus der Markov-Ungleichung folgt

$$P(|E(Z|\mathcal{G})| > a) \leq \frac{1}{a} E|E(Z|\mathcal{G})| \leq \frac{1}{a} EE(|Z||\mathcal{G}) = \frac{E|Z|}{a} \leq \delta$$

und daher

$$\int_{\{|E(Z|\mathcal{G})| > a\}} E(Z|\mathcal{G}) dP \leq \int_{\{\dots\}} |Z| dP \leq \varepsilon$$

für alle $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$. □