Exkurs B: Vektorweise stochastische Integration

Das Konzept der „vektorweisen“ stochastischen Integration erlaubt eine nützliche Abschwächung der Integrabilitätsvoraussetzungen für Handelsstrategien in mathematischen Finanzmarktmodellen.

$\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ sei eine Filtration auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit $\mathbb{F} = \mathbb{F}^*$ und $W = (W_t)_{t\in[0,T]}$ eine stetige $\mathbb{F} - BM^k$ (vgl. Exkurs A). Ferner sei $X = (X^1, \ldots, X^d)^T$ ein $\mathbb{R}^d$-wertiger Ito-Prozeß,

$$X_t = X_0 + \int_0^t H_s ds + \int_0^t K_s dW_s, t \in [0,T]$$

mit einem $\mathbb{R}^d$-wertigen Prozeß $H = (H^1, \ldots, H^d)^T$ und einem $\mathbb{R}^{d\times k}$-wertigen Prozeß $K = (K^{ij})_{i,j}$.

Es gilt also

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t H_s^i ds + \sum_{j=1}^k \int_0^t K_s^{ij} dW_s^j.$$

B 1 Komponentenweise Integration bzgl. X
$U = (U^1, \ldots, U^d)^T$ sei ein $\mathbb{R}^d$-wertiger, progressiver Prozeß mit

$$(1) \qquad \int_0^T \mid U_s^i H_s^i \mid ds < \infty \text{ f.s.}, \int_0^T \mid U_s^i K_s^{ij} \mid^2 < \infty \text{ f.s.} \quad \forall i, j.$$

Man definiere

$$\int_0^t U_s^T dX_s := \sum_{i=1}^d \int_0^t U_s^i dX_s^i, t \in [0,T].$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_0^t U_s^T dX_s &= \sum_{i=1}^d \{\int_0^t U_s^i H_s^i ds + \sum_{j=1}^k \int U_s^i K_s^{ij} dW_s^j\} \\ &= \int_0^t (\sum_{i=1}^d U_s^i H_s^i) ds + \sum_{j=1}^k \int_0^t (\sum_{i=1}^d U_s^i K_s^{ij}) dW_s^j \\ &= \int_0^t (U_s^T H_s) ds + \int_0^t (U_s^T K_s) dW_s. \end{aligned}$$

$(\int_0^t U_s^T dX_s)_{t\in[0,T]}$ ist ein reeller Ito-Prozeß.

B2 Vektorweise Integration bzgl. X
Unter den nach B1 naheliegenden, schwächeren Integrabilitätsbedingungen

$$(2) \qquad \begin{aligned} &\int_0^T \mid U_s^T H_s \mid ds < \infty \text{ f.s.}, \\ &\int_0^T \parallel U_s^T K_s \parallel^2 \text{ ds} < \infty \text{ f.s.} \end{aligned}$$

an U definiere man

$$\begin{aligned} (V) \int_0^t U_s^T dX_s &:= \int_0^t (U_s^T H_s) ds + \int_0^t (U_s^T K_s) dW_s \\ &= \int_0^t (\sum_{i=1}^d U_s^i H_s^i) ds + \sum_{j=1}^k \int_0^t (\sum_{i=1}^d U_s^i K_s^{ij}) dW_s^j. \end{aligned}$$

$((V)\int_0^t U_s^T dX_s)_{t\in[0,T]}$ ist dann ein reeller Ito-Prozeß. Unter der Bedingung (1) stimmen beide Integrale überein. Für $d = k$ und $X = W$, als $H = 0$ und $K = I_d$, unterscheiden sich (1) und (2) nicht.

B3 Anwendung auf Handelsstrategien

Der gains process G einer Handelsstrategie (H, K) in Definition 1.4 der Vorlesung läßt sich schreiben als

$$\begin{aligned} G_t &= \int_0^t (r_s\varphi_s + \pi_s^T \mu_s)ds + \int_0^t (\pi_s^T \sigma_s)dW_s \\ &= (V)\int_0^t \binom{H_s}{K_s}^T d\binom{B_s}{S_s}, \end{aligned}$$

wobei $\varphi = HB, \pi = (K^1S^1, \ldots, K^dS^d)^T$. Lemma 1.6 kann man folgendermaßen lesen: für Handelsstrategien (H, K) mit Wertprozeß $V = V(H, K)$ gilt

$$(H, K) \in SF \Leftrightarrow \beta_t V_t = \beta_0 V_0 + (V)\int_0^t K_s^T d(\beta_s S_s) \forall t.$$

Literatur

Shiryaev, N.A. (1999): Essentials of Stochastic Finance. Facts, Models, Theory. World Scientific.
Chapter VII, 1 a.

Nielsen, L.T. (1999): Pricing anf Hedging of Derivative Securities. Oxford University Press.
Chapter 2.2.

Jacod, J., Shiryaev, A.N. (1987): Limit Theorems for Stochastic Processes. Springer (Second Edition 2003).
Chapter III 4 a