SP II
Exkurs A: Die Novikov-Bedingung

$W = (W_t)_{t\geq 0}$ sei eine $I\!F$-BM ($I\!F = I\!F^*$), $K \in \mathcal{L}^2_{lok}(W)$ und $M := K \cdot W$. Dann gilt $M \in \mathscr{M}_{lok}$, $[M]_t = \int_0^t K_s^2 ds$, das Doléans-Exponential $\mathcal{E}(M) = \exp(M - \frac{1}{2}[M])$ ist ein positives stetiges lokales Martingal und ein Supermartingal (s. Beispiel 4.15), aber i.A. kein Martingal.

A1 Satz (Novikov) Falls

$$I\!E \exp(\frac{1}{2}[M]_t) < \infty \quad \forall t \geq 0,$$

ist $\mathcal{E}(M)$ ein Martingal.

Der Beweis basiert auf cleveren Anwendungen der Hölderschen Ungleichung. Das folgende Lemma spielt eine entscheidende Rolle.

A2 Lemma Es seien $p, q \in (1,\infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Falls

$$\sup\{I\!E \exp(\frac{\sqrt{p}}{2(\sqrt{p}-1)} M_\tau) : \tau\ SZ, \tau \leq c\} < \infty \quad \forall c \in I\!R_+,$$

ist $\mathcal{E}(M)$ ein $\mathscr{L}^q$-Martingal.

Beweis. Sei τ eine SZ mit $\tau \leq c < \infty$. Sei ferner

$$u := \frac{\sqrt{p}+1}{\sqrt{p}-1} \text{ und } v := \frac{\sqrt{p}+1}{2}.$$

Dann gilt $u > 1$, $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = 1$ und

$$(q - \sqrt{\frac{q}{u}})v = \frac{\sqrt{p}}{2(\sqrt{p}-1)}.$$

Wegen

$$\mathcal{E}(M)^q_\tau = \exp(\sqrt{\frac{q}{u}} M_\tau - \frac{q}{2}[M]_\tau) \exp((q - \sqrt{\frac{q}{u}})M_\tau)$$

ergibt die Höldersche Ungleichung

$$\begin{aligned} I\!E\mathcal{E}(M)^q_\tau &\leq (I\!E \exp(\sqrt{qu}M_\tau - \tfrac{qu}{2}[M]_\tau))^{1/u} (I\!E \exp((q - \sqrt{\tfrac{q}{u}})vM_\tau))^{1/v} \\ &= (I\!E\mathcal{E}(\sqrt{qu}M)_\tau)^{1/u} (I\!E \exp(\tfrac{\sqrt{p}}{2(\sqrt{p}-1)} M_\tau))^{1/v}. \end{aligned}$$

$\mathcal{E}(\sqrt{qu}M)^\tau$ ist ein stetiges positives lokales Martingal (Optional stopping, s. Satz 1.13) und damit ein Supermartingal. Dies liefert

$$I\!E\mathcal{E}(\sqrt{qu}M)_\tau = I\!E\mathcal{E}(\sqrt{qu}M)^\tau_c \leq I\!E\mathcal{E}(\sqrt{qu}M)^\tau_0 = 1.$$

Man erhält

$$\sup\{\mathbb{E}\mathcal{E}(M)_\tau^q : \tau\ SZ, \tau \le c\} < \infty.$$

Wegen $q > 1$ ist somit $\{\mathcal{E}(M)_\tau : \tau SZ, \tau \le c\}$ gleichgradig integrierbar (s. Exkurs B2, SP I), d.h. $\mathcal{E}(M)$ erfüllt die lokale Doob-Bedingung LD. Daher ist $\mathcal{E}(M)$ ein Martingal (s. Satz 1.16; die dortige Bedingung an den Startwert spielt keine Rolle). □

Beweis von Satz A1. Sei τ eine SZ mit $\tau \le c < \infty$. Wegen

$$\begin{aligned}\exp(\tfrac{1}{2}M_\tau) &= \exp(\tfrac{1}{2}M_\tau - \tfrac{1}{4}[M]_\tau)\exp(\tfrac{1}{4}[M]_\tau) \\ &\le \exp(\tfrac{1}{2}M_\tau - \tfrac{1}{4}[M]_\tau)\exp(\tfrac{1}{4}[M]_c)\end{aligned}$$

und

$$\mathbb{E}\mathcal{E}(M)_\tau = \mathbb{E}\mathcal{E}(M)_c^\tau \le 1$$

ergibt die Höldersche Ungleichung

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\exp(\tfrac{1}{2}M_\tau) &\le (\mathbb{E}\mathcal{E}(M)_\tau)^{1/2}(\mathbb{E}\exp(\tfrac{1}{2}[M]_c))^{1/2} \\ &\le (\mathbb{E}\exp(\tfrac{1}{2}[M]_c))^{1/2} < \infty.\end{aligned}$$

Somit gilt

$$\sup\{\mathbb{E}\exp(\frac{1}{2}M_\tau) : \tau\ SZ, \tau \le c\} < \infty \quad \forall c \in \mathbb{R}_+.$$

Für $a \in (0,1)$ sei $p := 1/(1-a^2)$ und $q := 1/a^2$. Wegen

$$\frac{a\sqrt{p}}{2(\sqrt{p}-1} = \frac{1}{2}$$

folgt aus Lemma A2, dass $\mathcal{E}(aM)$ ein ($\mathscr{L}^q-$)Martingal ist. Wegen

$$\mathcal{E}(aM)_t = \mathcal{E}(M)_t^{a^2}\exp(a(1-a)M_t)$$

liefert die Höldersche Ungleichung für alle $t \ge 0$

$$\begin{aligned}1 = \mathbb{E}\mathcal{E}(aM)_t &\le (\mathbb{E}\mathcal{E}(M)_t^{a^2q})^{1/q}(\mathbb{E}\exp(a(1-a)pM_t))^{1/p} \\ &= (\mathbb{E}\mathcal{E}(M)_t)^{a^2}(\mathbb{E}\exp(\tfrac{a}{1+a}M_t))^{1-a^2} \\ &= (\mathbb{E}\mathcal{E}(M)_t)^{a^2}(\mathbb{E}\exp(\tfrac{1}{2}M_t)^{2a/(1+a)})^{1-a^2}\end{aligned}$$

Für $u := 2a/(1+a) < 1$ gilt

$$(\mathbb{E}\exp(\frac{1}{2}M_t)^u)^{1/u} \le \mathbb{E}\exp(\frac{1}{2}M_t)$$

und daher

$$(\mathbb{E}\exp(\frac{1}{2}M_t)^u)^{1-a^2} \le (\mathbb{E}\exp(\frac{1}{2}M_t))^{2a(1-a)}.$$

Man erhält

$$1 \leq (I\!E\mathcal{E}(M)_t)^{a^2}(I\!E\exp(\frac{1}{2}M_t)^{2a(1-a)}.$$

Da $I\!E\exp(\frac{1}{2}M_t) < \infty$, konvergiert die rechte Seite für $a \to 1$ gegen $I\!E\mathcal{E}(M)_t$, also

$$1 \leq I\!E\mathcal{E}(M)_t.$$

Da $I\!E\mathcal{E}(M)_t \leq 1$, gilt $I\!E\mathcal{E}(M)_t = 1$ für alle $t \geq 0$. Somit ist das Supermartingal $\mathcal{E}(M)$ ein Martingal (s. Aufgabe 3). □

A3 Bemerkung. Das Resultat A1 gilt für beliebige $M \in \mathscr{M}_{lok}$. A1 lässt sich dann auch so formulieren: M und A seien stetige adaptierte (reelle) Prozesse mit $M_0 = A_0 = 0$ und A sei wachsend. Der Prozess

$$Z^b := \exp(bM - \frac{b^2}{2}A)$$

sei für alle $b \in I\!R$ ein lokales Martingal. (Dies ist äquivalent zu $M \in \mathscr{M}_{lok}$ und $[M] = A$.) Falls

$$I\!E\exp(\frac{1}{2}A_t) < \infty \quad \forall t \geq 0,$$

ist Z^1 ein Martingal.

Beweis. Man ersetze in obigem Beweis $[M]$ duch A und $\mathcal{E}(bM)$ durch Z^b. □