Exkurs A: MIT

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

A.1 Für $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$ sei

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m\geq n} A_m$$

und

$$\liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m\geq n} A_m.$$

A.2 (Markov-Ungleichung) Sei X eine $[0,\infty]$-wertige Zufallsvariable. Dann gilt $P(X \geq a) \leq \frac{1}{a}EX$ für alle $a > 0$.

Beweis. Aus $a1_{\{X\geq a\}} \leq X1_{\{X\geq a\}} \leq X$ folgt $aP(X \geq a) \leq EX$. □

A.3 (Jensen-Ungleichung) Seien $X \in \mathcal{L}^1(P)$, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall $\neq \emptyset, X(\Omega) \subset I$ und $f : I \to \mathbb{R}$ konvex. Dann gelten $EX \in I, f(X)^- \in \mathcal{L}^1(P)$ und

$$f(EX) \leq Ef(X).$$

Beweis. Wengenroth, Satz 4.17. □

A.4 Sei X eine reelle Zufallsvariable. Dann gilt

$$||X||_{p_1} \leq ||X||_{p_2} \text{ für } 0 < p_1 < p_2 < \infty,$$

wobei $||X||_p := (E|X|^p)^{1/p}$.

Beweis. Mit der Hölder-Ungleichung folgt für $r := p_2/p_1 > 1$ und $s := r/(r-1)$

$$\begin{aligned} E|X|^{p_1} &= \int |X|^{p_1} 1 dP \\ &\leq ||\ |X|^{p_1}\ ||_r ||1||_s \\ &= (\int |X|^{p_1 r} dP)^{1/r} = (\int |X|^{p_2} dP)^{p_1/p_2}. \end{aligned}$$

□

A.5 Sei X eine $[0,\infty]$-wertige Zufallsvariable. Dann gilt

$$EX = \int_0^\infty P(X \geq t)dt = \int_0^\infty P(X > t)dt.$$

Beweis. Der Subgraph

$$A := \{(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R} : 0 \leq t \leq X(\omega)\}$$

liegt in $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ und nach dem Satz von Fubini gilt

$$\begin{aligned} EX &= \int \lambda([0, X(\omega)]) dP(\omega) \\ &= \int \lambda(A_\omega) dP(\omega) \\ &= \int_0^\infty P(A_t) d\lambda(t) \\ &= \int_0^\infty P(X \geq t) d\lambda(t). \end{aligned}$$

Die 2. Gleichung erhält man mit $\tilde{A} := \{(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R} : 0 \leq t < X(\omega)\}$ statt A. □

A.6 (a) Seien X eine reelle Zufallsvariable und $0 < p < \infty$. Dann gilt

$$\sum_{n=1}^\infty P(|X| \geq n^{1/p}) \leq E|X|^p \leq 1 + \sum_{n=1}^\infty P(|X| \geq n^{1/p}).$$

(b) Sei X $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$-wertige Zufallsvariable. Dann gilt

$$EX = \sum_{n=1}^\infty P(X \geq n).$$

Beweis. (a) Es gilt mit monotoner Konvergenz und A.5

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^\infty P(|X| \geq n^{1/p}) &= \sum_{n=1}^\infty P(|X|^p \geq n) \\ &= \sum_{n=1}^\infty \int_{n-1}^n P(|X|^p \geq n) dt \\ &\leq \sum_{n=1}^\infty \int_{n-1}^n P(|X|^p \geq t) dt \\ &= \int_0^\infty P((X|^p \geq t) dt \\ &= E|X|^p \\ &\leq \sum_{n=1}^\infty \int_{n-1}^n P(|X|^p \geq n-1) dt \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty} P(|X|^p \geq n-1) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P(|X|^p \geq n) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P(|X|^p \geq n).
\end{aligned}
$$

(b) folgt aus $X = \sum_{n \in \mathbb{N}} 1_{\{n \leq X\}}$ und monotoner Konvergenz. □

A.7 (Satz von Scheffé) Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $f_n, f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $f_n \to f \mu$-f.s. und $||f_n||_1 \to ||f||_1$ für $n \to \infty$. Dann gilt

$$f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^1(\mu)} f.$$

Beweis. Für $g_n := |f_n - f| - |f_n| + |f|$ gilt $g_n \to 0$ μ-f.s. und

$$|g_n| \leq |\, |f_n - f| - |f_n|\, | + |f| \leq 2|f| \in \mathcal{L}^1(\mu).$$

Mit dominierter Konvergenz folgt $\int |f_n - f| d\mu = \int g_n d\mu + ||f_n||_1 - ||f||_1 \to 0$. □

A.8 (Transformationsformel für λ^n-Dichten) Seien Q ein W-Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ mit λ^n-Dichte f, also $Q = f\lambda^n$, $G \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $Q(G) = 1$, $G = \bigcup_{i \in I} G_i$ mit $G_i \subset \mathbb{R}^n$ offen, paarweise disjunkt, $I \subset \mathbb{N}, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Borel-messbar und $g_i := g|G_i : G_i \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, injektiv, $\det g_i'(x) \neq 0$ für alle $x \in G_i, i \in I$. Dann gilt

$$Q^g = h\lambda^n$$

mit

$$h(y) = \sum_{i \in I} \frac{f(g_i^{-1}(y))}{|\det\, g_i'(g_i^{-1}(y))|}\, 1_{g_i(G_i)}(y).$$

Beweis. Für $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ gilt mit Substitutionsformel für λ^n-Integrale

$$
\begin{aligned}
Q^g(A) &= Q(g^{-1}(A)) = Q(g^{-1}(A) \cap G) \\
&= \sum_{i \in I} Q(g^{-1}(A) \cap G_i) \\
&= \sum_{i \in I} \int_{G_i} 1_A(g_i(x)) f(x) d\lambda^n(x) \\
&= \sum_{i \in I} \int_{g_i(G_i)} 1_A(g_i \circ g_i^{-1}(y)) f(g_i^{-1}(y)) |\det (g_i^{-1})'(y)| d\lambda^n(y) \\
&= \sum_{i \in I} \int_{g_i(G_i)} 1_A(y) f(g_i^{-1}(y))\, \frac{1}{|\det g_i'(g_i^{-1}(y))|} d\lambda^n(y) \\
&= \int_A h d\lambda^n.
\end{aligned}
$$

□