SPI

Exkurs A: Bedingte Erwartungswerte, bedingte Verteilungen

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sei W-Raum, $X : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ P-quasiintegrierbar, $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ Unter - σ- Algebra.

$E(X|\mathcal{F}) = E_P(X|\mathcal{F})$ (Version des) **bedingter Erwartungswert von X unter**$\mathcal{F}$ (bzgl.P): P-f.s. eindeutig bestimmte P-quasiintegrierbare ZV $\Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ mit

(1) $$\mathcal{F} - \text{messbar}$$

(2) $$\int\limits_F E(X|\mathcal{F})dP \;=\int\limits_F X\; dP \;\; \forall F \in \mathcal{F}(\text{ Radon - Nikodym - Gleichung}).$$

Für $A \in \mathcal{A}$ heißt $P(A|\mathcal{F}) := E(1_A|\mathcal{F})$ **bedingte Wahrscheinlichkeit von A unter $\mathcal{F}$.**

Einige Rechenregeln:

Satz A.1 Es sei $X : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ P-quasiintegrierbar, $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$.

(a) $EE(X|\mathcal{F}) = EX$

(b) X $\mathcal{F}$ – messbar $\Rightarrow E(X|\mathcal{F}) = X$ P-f.s.

(c) (Tower property) $\mathcal{F} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{A} \Rightarrow$

$$E(E(X|\mathcal{G})|\mathcal{F}) = E(X|\mathcal{F}) = E(E(X|\mathcal{F})|\mathcal{G}) \text{ P-f.s.}$$

(d) (Taking out what is known) $Y : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ sei $\mathcal{F}$- messbar, XY quasiintegrierbar

$$\Rightarrow\; E(XY|\mathcal{F}) = YE(X|\mathcal{F}) \text{ P-f.s.}$$

(e) X und $\mathcal{F}$ unabhängig

$$\Rightarrow\; E(X|\mathcal{F}) \;=\; EX \text{ P-f.s.}$$

(f) (Jensensche Ungl.)
$I \subset \mathbb{R}$ sei offenes Intervall, $X \in \mathcal{L}^1(P)$, $P(X \in I) = 1, f : I \to \mathbb{R}$ konvex mit $f(X) \geq 0$ oder $f(X) \in \mathcal{L}^1(P)$

$$\Rightarrow\; E(X|\mathcal{F}) \in I \text{ P-f.s. },$$

$$f(E(X|\mathcal{F})) \leq E(f(X)|\mathcal{F}) \text{ P-f.s.}$$

Beweis. Bauer (4. Auflage, 1991), S. 120 - 124, Hoffmann-Jørgensen, Vol. I, S. 452. □

Satz A2 $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$.
(a) (Monotone Konvergenz) $X_n, X : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ seien messbar, $X_n \uparrow X$ f.s., $EX_1^- < \infty$
$\Rightarrow\; E(X_n|\mathcal{F}) \uparrow E(X|\mathcal{F})$ f.s.
Falls $X_n \downarrow X$, f.s., $EX_1^+ < \infty \Rightarrow\; E(X_n|\mathcal{F}) \downarrow E(X|\mathcal{F})$ f.s.

(b) (Dominierte Konvergenz) $X_n \in \mathscr{L}^1(P), X : \Omega \to \mathbb{R}\; ZV,\; Y \in \mathscr{L}^1(P), |X_n| \leq Y$ f.s. $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n \to X$ f.s.

$\Rightarrow\; X \in \mathscr{L}^1(P), E(X_n|\mathcal{F}) \to E(X|\mathcal{F})$ f.s.

(c) (Fatou) $X_n, Y : \Omega \to \overline{I\!R}$ seien messbar, $n \in I\!N$.

$X_n \geq Y$ f.s. $\forall n \in I\!N, EY^- < \infty$

$\Rightarrow E(\liminf_{n\to\infty} X_n|\mathcal{F}) \leq \liminf_{n\to\infty} E(X_n|\mathcal{F})$ f.s.

$X_n \leq Y$ f.s. $\forall n \in I\!N, EY^+ < \infty$

$\Rightarrow E(\limsup_{n\to\infty} X_n|\mathcal{F}) \geq \limsup_{n\to\infty} E(X_n|\mathcal{F})$ f.s. □

Beweis. Hoffmann-Jørgensen, Vol. I., S. 457.

Beispiel A.3 $A_i \in \mathcal{A}, i \in I$ seien paarweise disjunkt, I abzählbar, $\bigcup_{i\in I} A_i = \Omega$, $\mathcal{F} = \sigma(A_i, i \in I)$. Dann gilt

$$E(X \mid \mathcal{F}) = \sum_{i\in I} E(X \mid A_i) 1_{A_i}$$

mit

$$E(X \mid A_i) = \begin{cases} \int_{A_i} X dP / P(A_i) & , \quad P(A_i) > 0 \\ 0 \quad \text{(z.B.)} & , \quad \text{sonst.} \end{cases}$$

$(\Omega_t, \mathcal{A}_t)$ seien messb. Räume, $Y_t : \Omega \to \Omega_t$ messbar, $t \in T$.
$E(X|Y_t, t \in T) := E(X|\sigma(Y_t, t \in T))$ heißt **bedingter Erwartungswert von X unter $(Y_t)_{t\in T}$**.

$(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ sei messb. Raum, $Y : \Omega \to \Omega_2$ messbar.
$E(X|Y = y)$ **bedingter Erwartungswert von X unter Y = y,** $y \in \Omega_2$:

P^Y-f.s. eindeutig bestimmte P^Y-quasiintegrierbare ZV : $\Omega_2 \to \overline{I\!R}$ mit

$$\int_{A_2} E(X|Y = y) dP^Y(y) = \int_{Y^{-1}(A_2)} X dP \quad \forall A_2 \in \mathcal{A}_2. \tag{3}$$

Es gilt

$$E(X|Y) = E(X|Y = \cdot) \circ Y \quad \text{P-f.s.}$$

Für $X \in \mathcal{L}^1(P)$ heißt

$$\mathrm{Var}(X \mid \mathcal{F}) := E((X - E(X \mid \mathcal{F}))^2 \mid \mathcal{F})$$

bedingte Varianz von X unter $\mathcal{F}$. Es gilt

$$\mathrm{Var}(X \mid \mathcal{F}) = E(X^2 \mid \mathcal{F}) - (E(X \mid \mathcal{F}))^2$$

falls $X \in \mathcal{L}^2(P)$.
Zu bedingten Verteilungen:

Definition A.4 $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$ seien messbare Räume, $X : \Omega \to \Omega_1$ messbar, $Y : \Omega \to \Omega_2$ messbar, $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$.

(a) Ein Markov-Kern $K = K_P$ von $(\Omega, \mathcal{F})$ nach $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ mit

$$K(\cdot, A_1) = P(X \in A_1|\mathcal{F}) \text{ P-f.s. } \forall A_1 \in \mathcal{A}_1$$

heißt (eine Version der regulären)**bedingte Verteilung von X unter** $\mathcal{F}$ (bzgl. P). Bezeichnung $P^{X|\mathcal{F}} := K$. RN- Gleichung (2) hat die Form

(4) $$\int_F P^{X|\mathcal{F}}(\omega, A_1) dP(\omega) = P(X^{-1}(A_1) \cap F) \;\forall A_1 \in \mathcal{A}_1, F \in \mathcal{F}.$$

$P^{X|Y} := P^{X|\sigma(Y)}$ heißt **bedingte Verteilung von X unter Y.**

(b) Ein Markov-Kern $K = K_P$ von $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ nach $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ mit

$$K(\cdot, A_1) \;=\; P(X \in A_1|Y = \cdot) \text{ P}^Y\text{-f.s. } \forall\, A_1 \in \mathcal{A}_1$$

heißt **bedingte Verteilung von X unter Y =y,** $y \in \Omega_2$. Bezeichnung $P^{X|Y=y}(A_1) := K(y, A_1)$. RN- Gleichung (3) hat also die Form

(5) $$\begin{aligned} \int_{A_2} P^{X|Y=y}(A_1) dP^Y(y) &= P(X^{-1}(A_1) \cap Y^{-1}(A_2)) \\ &= P^{(X,Y)}(A_1 \times A_2) \;\forall A_i \in \mathcal{A}_i. \end{aligned}$$

In Situation wie in A.4 (b) :

Lemma A.5 $Y : \Omega \to \Omega_2$ sei messbar, K Markov-Kern von $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ nach $(\Omega_1 \mathcal{A}_1)$
$\Rightarrow$

(i) $\Omega_2 \to I\!R_+, y \mapsto K(y, D_y)$ ist $\mathcal{A}_2-$ messbar $\forall D \in \mathcal{A}_1 \bigotimes \mathcal{A}_2$.

(ii) $\widetilde{K}(y, D) := K(y, D_y)$ def. Markovkern von $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ nach $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \bigotimes \mathcal{A}_2)$.

(iii) $K \bigotimes P^Y(D) := \int K(y, D_y) dP^Y(y), D \in \mathcal{A}_1 \bigotimes \mathcal{A}_2$, ist W-Maß auf $\mathcal{A}_1 \bigotimes \mathcal{A}_2$.

(iv) (Fubini für Markov-Kerne)
$f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \overline{I\!R}$ sei $K \bigotimes P^Y-$ quasiintegrierbar
$\Rightarrow$
$\int f dK \bigotimes P^Y \;=\; \int\int f(x, y) K(y, dx) dP^Y(y)$.

Beweis. (i) $\mathcal{D} := \{D \in \mathcal{A}_1 \bigotimes \mathcal{A}_2 : y \mapsto K(y, D_y)\ \mathcal{A}_2- \text{ messb.}\}$ ist ein Dynkin-System. Für $\mathcal{E} = \{A_1 \times A_2 : A_i \in \mathcal{A}_i\}$ gilt $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}$, denn

$$K(y, (A_1 \times A_2)_y) = K(y, A_1) 1_{A_2}(y).$$

Ferner ist $\mathcal{E}$ ein $\cap$- stabiler Erzeuger von $\mathcal{A}_1 \bigotimes \mathcal{A}_2$. Es folgt

$$\mathcal{A}_1 \bigotimes \mathcal{A}_2 = \sigma(\mathcal{E}) = \delta(\mathcal{E}) \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{A}_1 \bigotimes \mathcal{A}_2,$$

wobei $\delta(\mathcal{E})$ das von $\mathcal{E}$ erzeugte Dynkin - System bezeichnet.

(ii) und (iii) sind klar.

(iv) Für $f = 1_D, D \in \mathcal{A}_1 \bigotimes \mathcal{A}_2$, ist das die Definition von $K \bigotimes P^Y$. Rest folgt über Aufbau der $\mathcal{A}_1 \bigotimes \mathcal{A}_2$ -messbaren Funktionen. $\square$

Beispiel A.6 $X : \Omega \to \Omega_1$ und $Y : \Omega \to \Omega_2$ seien messbar.

(a) X, Y unabhängig $\Rightarrow P^{X|Y=y} := P^X$ ist eine bedingte Verteilung von X unter $Y = y$, denn

$$\begin{aligned}\int_{A_2} P^X(A_1)dP^Y(y) &= P^X(A_1)P^Y(A_2) \\ &= P^X \otimes P^Y(A_1 \times A_2) \\ &= P^{(X,Y)}(A_1 \times A_2), A_i \in \mathcal{A}_i.\end{aligned}$$

Also gilt die definierende RN-Gleichung (5). (Die Umkehrung gilt auch.)

(b) Es existiere die bedingte Verteilung $P^{X|Y=y}, h : (\Omega_1, \mathcal{A}_1) \to (\Omega_3, \mathcal{A}_3)$ sei messbar $\Rightarrow$

$$P^{h(X)|Y=y} := (P^{X|Y=y})^h \text{ (Bildmaß)}$$

ist eine bedingte Verteilung von $h(X)$ unter $Y = y$. Dazu sei $K(y, A_3) := P^{X|Y=y}(h^{-1}(A_3), y \in \Omega_2$. Dann gilt: K ist Markov-Kern von $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ nach $(\Omega_3, \mathcal{A}_3)$ und

$$\begin{aligned}\int_{A_2} K(y, A_3)dP^Y(y) &= \int_{A_2} P^{X|Y=y}(h^{-1}(A_3))\, dP^Y(y) \\ &\underset{(5)}{=} P^{(X,Y)}(h^{-1}(A_3) \times A_2) \\ &= P^{(h(X),Y)}(A_3 \times A_2)\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Beh.

Falls bedingte Verteilungen existieren, lassen sich bedingte Erwartungswerte als Erwartungswerte bzgl. bedingter Verteilungen berechnen.

Satz A.7 $X : \Omega \to \Omega_1$ und $Y : \Omega \to \Omega_2$ seien meßbar, $P^{X|Y=y}$ existiere, $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \overline{I\!R}$ sei $P^{(X,Y)}$-quasiintegrierbar $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}&(i) \quad P^{(X,Y)} = P^{X|Y=\cdot} \otimes P^Y \quad (s.A.5) \\ &(ii) \quad E(f(X,Y)|Y = y) = \int f(x,y)P^{X|Y=y}(dx) \text{ P}^Y\text{-f.s} \\ &(iii) \quad Ef(X,Y) = \int\int f(x,y)P^{X|Y=y}(dx)dP^Y(y)\end{aligned}$$

Beweis. (i) Nach A.5 (iii) ist

$$Q := P^{X|Y=\cdot} \bigotimes P^Y$$

ein W-Maß auf $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. Wegen (5) gilt

$$\begin{aligned}Q(A_1 \times A_2) &= \int P^{X|Y=y}(A_1)1_{A_2}(y)dP^Y(y) \\ &= P^{(X,Y)}(A_1 \times A_2), A_i \in \mathcal{A}_i,\end{aligned}$$

also $Q|\mathcal{E} = P^{(X,Y)}|\mathcal{E}$ für den $\cap$-stabilen Erzeuger $\mathcal{E} = \{A_1 \times A_2 : A_i \in \mathcal{A}_i\}$ von $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. Es folgt $Q = P^{(X,Y)}$.

(ii) Die rechte Seite ist $\mathcal{A}_2$- messbar in y. Ferner gilt mit Teil (i) und A.5 (iv)

$$\begin{aligned}&\int_{A_2} \int f(x,y)P^{X|Y=y}(dx)dP^Y(y) \\ &= \int\int f1_{\Omega_1 \times A_2}dP^{X|Y=\cdot} \otimes P^Y \\ &= \int\int f1_{\Omega_1 \times A_2}dP^{(X,Y)} \\ &= \int_{Y^{-1}(A_2)} f(X,Y)dP \quad \forall A_2 \in \mathcal{A}_2.\end{aligned}$$

Dies ist definierende RN-Gleichung (3).
(iii) Wähle $A_2 = \Omega_2$ im Beweis von (ii). $\square$

Korollar A.8 $X : \Omega \to \Omega_1$ und $Y : \Omega \to \Omega_2$ seien messbar.

(a) $P^{X|Y=y}$ existiere, $h : \Omega_1 \to \overline{I\!R}$ sei P^X- quasiintegrierbar
$\Rightarrow E(h(X)|Y = y) = \int h(x) P^{X|Y=y}(dx)$ P^Y-f.s.
($\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$, $P^{X|\mathcal{F}}$ existiere
$\Rightarrow E(h(X)|\mathcal{F})(\omega) = \int h(x) P^{X|\mathcal{F}}(\omega, dx)$ P-f.s.)

(b) (Substitutionsregel bei Unabhängigkeit)
X, Y seien unabhängig, $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \overline{I\!R}$ sei $P^{(X,Y)}$ -quasiintegrierbar

$$\begin{aligned} \Rightarrow E(f(X,Y)|Y = y) &= \int f(x,y) dP^X(x) \\ &= Ef(X,y) \ \mathrm{P}^Y\text{-f.s.} \end{aligned}$$

Beweis. (a) Setze $f(x, y) = h(x)$ in A.7 (ii).

(b) Nach A.6 (a) ist P^X eine bedingte Verteilung von X unter $Y = y$. Die Beh. folgt damit aus A.7 (ii). $\square$

A.8 (b) kann man verschärfen: Y sei $\mathcal{F}$-messbar, $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$, X und $\mathcal{F}$ seien unabhängig

$$\begin{aligned} \Rightarrow \ E(f(X,Y) \mid \mathcal{F}) &= E(f(X,Y) \mid Y) \\ &= \int f(x,Y) dP^X(x) \quad \text{P-f.s.} \end{aligned}$$

(s. Hoffmann-Jørgensen, Vol. I, S. 452). A 8 (b) entspricht $\mathcal{F} = \sigma(Y)$.

Satz A.9 (Existenz) $X : \Omega \to \Omega_1$ sei messbar, Ω_1 polnisch, $\mathcal{A}_1 = \mathcal{B}(\Omega_1)$.

(a) $Y : \Omega \to \Omega_2$ sei messbar
$\Rightarrow$ es ex. bedingte Verteilung $P^{X|Y=y}$.

(b) $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$
$\Rightarrow$ es ex. bedingte Verteilung $P^{X|\mathcal{F}}$.

Beweis. Bauer, S. 397, Gänssler/Stute, S. 196. $\square$

Jede offene und jede abgeschlossene Teilmenge von $I\!R^n$ ist polnisch.

Bemerkung A.10 (Eindeutigkeit) $X : \Omega \to \Omega_1$ und $Y : \Omega \to \Omega_2$ seien messbar, K_1, K_2 seien bedingte Verteilungen von X unter $Y = y$, $\mathcal{A}_1$ sei abzählbar erzeugt $\Rightarrow \exists N \in \mathcal{A}_2, P^Y(N) = 0$ mit $K_1(y, A_1) = K_2(y, A_1)\ \forall y \notin N\ \forall A_1 \in \mathcal{A}_1$.

Beweis. Bauer, S. 397, Gänssler/ Stute, S.197. $\square$

$X : \Omega \to \Omega_1$ und $Y : \Omega \to \Omega_2$ seien messbar. Interessant für die Berechnung der bedingten Verteilung ist der Fall, dass $P^{(X,Y)}$ durch ein Produktmaß dominiert wird,

$$P^{(X,Y)} << \mu_1 \bigotimes \mu_2, f^{(X,Y)} = dP^{(X,Y)}/d\mu_1 \bigotimes \mu_2.$$

Dabei ist μ_i ein σ-endliches Mass auf $\mathcal{A}_i$. Die μ_2- Dichte f^Y von P^Y lässt sich als Randdichte berechnen,

$$f^Y(y) = \int f^{(X,Y)}(x,y)d\mu_1(x).$$

Sei

$$f^{X|Y=y}(x) := \begin{cases} \frac{f^{(X,Y)}(x,y)}{f^Y(y)} & , \quad f^Y(y) > 0 \\ g(x) & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

die **bedingte Dichte von X unter Y = y.** (g ist eine beliebige W-Dichte bzgl.μ_1.)

Satz A.11 In obiger Situation sei

$$K(y, A_1) := \int\limits_{A_1} f^{X|Y=y}(x)d\mu_1(x), y \in \Omega_2, A_1 \in \mathcal{A}_1$$

$\Rightarrow K$ ist eine bedingte Verteilung von X unter $Y = y$.

Beweis. K ist offenbar ein Markov-Kern von $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ nach $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$. Es gilt

$$P^Y(f^Y = 0) = \int\limits_{\{f^Y=0\}} f^Y \, d\mu_2 = 0.$$

Ferner

$$\begin{aligned} \int\limits_{A_2} K(y, A_1)dP^Y(y) &= \int\limits_{A_2 \cap \{f^Y>0\}} K(y, A_1)dP^Y(y) \\ &= \int\limits_{A_2 \cap \{f^Y>0\}} \int\limits_{A_1} f^{X|Y=y}(x)d\mu_1(x)f^Y(y)d\mu_2(y) \\ &= \int\limits_{A_2 \cap \{f^Y>0\}} \int\limits_{A_1} f^{X,Y)}(x,y)d\mu_1(x)d\mu_2(y) \\ &= P^{(X,Y)}(A_1 \times A_2) \; \forall A_i \in \mathcal{A}_i. \end{aligned}$$

Also gilt die RN- Gleichung (5). □