Diskrete Verteilungen

Poisson-Verteilung $Poi(\lambda)$

Zähldichte
$$f(n) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}, n \in \mathbb{N}_0,$$
$\lambda > 0$, diskreter Träger $\mathbb{N}_0$. Für $X \sim Poi(\lambda)$ gilt
$$EX = \lambda,\ \text{Var}\ X = \lambda.$$

Binomialverteilung $B(n,p)$

Zähldichte
$$f(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}\ , k \in \{0,\ldots,n\},$$
$n \in \mathbb{N}, p \in (0,1)$, diskreter Träger $\{0,\ldots,n\}$. Für $X \sim B(n,p)$ gilt
$$EX = np,\ \text{Var}X = np(1-p).$$

$B(1,p)$ heißt **Bernoulli-Verteilung**.

Hypergeometrische Verteilung $H(N,M,n)$

Zähldichte
$$f(k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}},\ k \in \{0,\ldots,n\},$$
$N, M, n \in \mathbb{N}, M \leq N, n \leq N$, diskreter Träger $\{\max\{0, n-N+M\},\ldots,\min\{n,M\}\}$.
Für $X \sim H(N,M,n)$ gilt
$$\begin{aligned} EX &= n\tfrac{M}{N}, \\ \text{Var}X &= \tfrac{M(N-M)}{N^2} \text{ für } n=1,\ \text{Var}\ X = n\tfrac{M(N-M)}{N^2}\tfrac{N-n}{N-1} \text{ für } n \geq 2. \end{aligned}$$

Laplace-Verteilung

Zähldichte
$$f(\omega) = \frac{1}{|\ \Omega\ |}, \omega \in \Omega,$$
$|\ \Omega\ | < \infty$. Für $\Omega = \{1,\ldots,n\}$ und X Laplace-verteilt auf Ω gilt
$$EX = \frac{n+1}{2},\ \text{Var}\ X = \frac{n^2-1}{12}$$

Geometrische Verteilung $G(p)$

Zähldichte
$$f(n) = p(1-p)^{n-1}, n \in \mathbb{N},$$

$p \in (0,1)$, diskreter Träger $I\!N$. Für $X \sim G(p)$ gilt

$$EX = \frac{1}{p},\ \text{Var } X = \frac{1-p}{p^2}.$$

Absolut stetige Verteilungen

Normalverteilung N(a,σ^2)

λ^1- Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} exp(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}), x \in I\!R,$$

$a \in I\!R, \sigma > 0$. Für $X \sim N(a, \sigma^2)$ gilt

$$EX = a, VarX = \sigma^2,\ \text{Med}(X) = \{a\}.$$

λ^1-Dichte von N(0,1)

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp(-\frac{x^2}{2}),$$

Verteilungsfunktion

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(y)dy,$$

α- Fraktil

$$u_\alpha = \Phi^{-1}(1-\alpha), \alpha \in (0,1).$$

Es gilt

$$u_{1-\alpha} = -u_\alpha,\ u_{0.05} = 1.645,\ u_{0.025} = 1.96,\ u_{0.01} = 2.326,\ u_{0.005} = 2.576.$$

Logistische Verteilung L(a)

λ^1-Dichte

$$f(x) = \frac{e^{x/a}}{a(1+e^{x/a})^2}\ , x \in I\!R,$$

Verteilungsfunktion

$$F(x) = \frac{1}{1+e^{-x/a}} = \frac{e^{x/a}}{1+e^{x/a}},$$

$a > 0$. L(a) ist symmetrisch um 0. Für $X \sim L(a)$ gilt

$$EX = 0, \text{Var}X = \frac{a^2\pi^2}{3}, \text{Med}(X) = \{0\}.$$

Doppelexponentialverteilung DE(a)

λ^1 -Dichte

$$f(x) = \frac{1}{2a}\ e^{-|x|/a}, x \in I\!R,$$

Verteilungsfunktion

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{x/a} & , \quad x \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x/a} & , \quad x > 0, \end{cases}$$

$a > 0$. DE (a) ist symmetrisch um 0. Für $X \sim$DE (a) gilt

$$EX = 0, \mathrm{Var}X = 2a^2, \mathrm{Med}(X) = \{0\}.$$

Cauchy - Verteilung C(a)

λ^1 -Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\pi a} \frac{1}{1 + (x/a)^2} = \frac{a}{\pi} \frac{1}{a^2 + x^2}, \; x \in I\!R,$$

Verteilungsfunktion

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \tan^{-1}(\frac{x}{a}),$$

$a > 0$. C(a) ist symmetrisch um 0. Für $X \sim C(a)$ gilt $\mathrm{Med}(X) = \{0\}$. (EX existiert nicht.)

(Zentrale) t-Verteilung t_n

λ^1- Dichte

$$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi n}\Gamma(\frac{n}{2})}(1 + \frac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}} \; , x \in I\!R,$$

n$\in I\!N$. t_n ist symmetrisch um 0. Es gilt $t_1 = C(1)$. Für $X \sim t_n$ gilt

$$EX = 0 \text{ für } n > 1, \mathrm{Var}X = \frac{n}{n-2} \text{ für } n > 2, \mathrm{Med}(X) = \{0\}.$$

$$(\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt, \; x > 0, \text{Gammafunktion})$$

Uniforme Verteilung U(a, b)

λ^1- Dichte

$$f(x) = \frac{1}{b-a} 1_{[a,b]}(x), \; x \in I\!R,$$

$a, b \in I\!R, a < b$. $U(a, b)$ ist symmetrisch um $(a + b)/2$. Für $X \sim U(a, b)$ gilt

$$EX = \frac{a+b}{2}, \mathrm{Var}X = \frac{(b-a)^2}{12}, \mathrm{Med}(X) = \{\frac{a+b}{2}\}.$$

Exponentialverteilung E(a)

λ^1-Dichte

$$f(x) = \frac{1}{a}e^{-x/a} \; 1_{(0,\infty)}(x) \; , x \in I\!R,$$

Verteilungsfunktion

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x/a} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x \leq 0, \end{cases}$$

$a > 0$. Für $X \sim$E (a) gilt

$$EX = a,\ \mathrm{Var}X = a^2,\ \mathrm{Med}(X) = \{a\ log2\}.$$

Weibull- Verteilung W(a,b)

λ^1-Dichte

$$f(x) = \frac{b}{a^b} x^{b-1} \exp(-(\frac{x}{a})^b) 1_{(0,\infty)}\ (x),$$

Verteilungsfunktion

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-(\frac{x}{a})^b) & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x \leq 0, \end{cases}$$

$a > 0,\ b > 0$. Es gilt $W(a,1) = E(a)$. $W(a,2)$ heißt **Rayleigh- Verteilung**.

Für $X \sim W(a,b)$ gilt

$$EX = a\Gamma(1 + \frac{1}{b}),$$

$$\mathrm{Var}X = a^2[\Gamma(\frac{2}{b} + 1) - \Gamma(\frac{1}{b} + 1)^2],$$

$$\mathrm{Med}(X) =)\{a(log2)^{1/b}\}.$$

Gamma-Verteilung $\Gamma(a,b)$

λ^1-Dichte

$$f(x) = \frac{1}{a^b\Gamma(b)} x^{b-1} e^{-x/a} 1_{(0,\infty)}(x), x \in I\!R,$$

$a > 0, b > 0$. Es gilt $\Gamma(a,1) = E(a)$.
Für $X \sim \Gamma(a,b)$ gilt

$$EX = ab, \mathrm{Var}X = a^2 b.$$

(Zentrale) χ^2**-Verteilung** χ^2_n

λ^1-Dichte

$$f(x) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(\frac{n}{2})}\ x^{\frac{n-2}{2}}\ e^{-x/2}\ 1_{(0,\infty)}(x)\ , x \in I\!R$$

$n \in I\!N$. Es gilt $\chi^2_n = \Gamma(2, \frac{n}{2})$ und $\chi^2_2 = \Gamma(2,1) = E(2)$. Für $X \sim \chi^2_n$ gilt

$$EX = n,\ \mathrm{Var}X = 2n.$$

Für $X_1, \ldots,\ X_n$ i.i.d., $X_1 \sim N(0,1)$ gilt

$$\sum_{i=1}^n X_i^2 \sim \chi^2_n.$$

Lognormale Verteilung LN(a,σ^2)

λ^1-Dichte

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}\sigma}\exp(-\frac{(logx-a)^2}{2\sigma^2})1_{(0,\infty)}(x), x \in I\!R,$$

$a \in I\!R,\ \sigma > 0$. Für $X \sim LN(a,\sigma^2)$ gilt

$$\begin{array}{lcl} EX & = & e^{a+\sigma^2/2} \\ \mathrm{Var}\ X & = & e^{2a+\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1), \\ \mathrm{Med}(X) & = & \{e^a\}. \end{array}$$

Ferner gilt

$$X \sim LN(a,\sigma^2) \Leftrightarrow logX \sim N(a,\sigma^2).$$

Pareto - Verteilung Pa(a,b)

λ^1- Dichte

$$f(x) = \ ba^b\ x^{-(b+1)}\ 1_{(a,\infty)}(x),\ x \in I\!R,$$

Verteilungsfunktion

$$F(x) = \begin{cases} 1-(\frac{a}{x})^b & , \quad x > a \\ 0 & , \quad x \leq a, \end{cases}$$

$a > 0,\ b > 0$. Für $X \sim$ Pa(a,b) gilt

$$\begin{array}{lcl} EX & = & \frac{ab}{b-1}, b > 1 \\ \mathrm{Var}X & = & \frac{a^2b}{(b-2)(b-1)^2}\ , b > 2 \\ \mathrm{Med}(X) & = & \{a2^{1/b}\}. \end{array}$$

Beta-Verteilung Be(p, q)

λ^1 -Dichte

$$f(x) = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)}x^{p-1}(1-x)^{q-1}1_{(0,1)}(x),\ x \in I\!R,$$

$p > 0,\ q > 0$. Be(p,p) (p=q) ist symmetrisch um 1/2. Es gilt Be(1,1) = U(0,1).
Für $X \sim Be(p,q)$ gilt

$$\begin{array}{lcl} EX & = & \frac{p}{p+q}, \\ \mathrm{Var}X & = & \frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)}. \end{array}$$