Numerik der Differentialgleichungen (WS 2013/14)

Übungsblatt 9 Abgabe: Mo, 16. Dezember 2013, bis 16^{00} Uhr,

Sachs/Groß Kasten mit Aufschrift *Numerik der Dgl.* im 1. Stock des E-Gebäudes

Aufgabe 14: (4+6 Punkte)

Eine Diskretisierung der Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= f(x)\ , \quad x \in \Omega := (0,1) \\ u(0) &= u(1) = 0 \end{aligned}$$

mit Hilfe des Differenzenverfahrens führt mit einer Schrittweite $h = \frac{1}{n}$ auf dem Gitter $\Omega_h := \{x_j = jh,\ j = 1, \ldots, n-1\}$ zu einem linearen Gleichungssystems der Gestalt $A_h u_h = f_h$ mit

$$A_h = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \ddots & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} u_h &= (u_{h,1}, \ldots, u_{h,n-1})^\top\ , \quad u_{h,i} \approx u(x_i)\,, \\ f_h &= (f(x_1), \ldots, f(x_{n-1}))^\top\ . \end{aligned}$$

Zur Lösung des Gleichungssystems $A_h u_h = f_h$ werde das gedämpfte Jacobi–Verfahren

$$\begin{aligned} u_h^{i+1} &= J_h(\omega) u_h^i + \frac{\omega}{2}\ h^2 f_h\,, \\ J_h(\omega) &= (1-\omega) I + \omega (I - D_h^{-1} A_h)\,, \quad D_h = \tfrac{2}{h^2} I \end{aligned}$$

verwendet, das eine Folge u_h^i von Näherungsvektoren für die exakte Lösung u_h erzeugt.

i) Bestimmen Sie die Eigenwerte $\mu^k(\omega)$ der dazu gehörigen Eigenvektoren $z^k = (\sin(\pi jkh))_{j=1}^{n-1}$ der Matrix $J_h(\omega)$. Welche Konsequenzen haben diese Eigenwerte auf die numerische Lösbarkeit obiger Randwertaufgabe?
(**Hinweis:** Programmieraufgabe 5 ii))

ii) Zeigen Sie, dass nach einem Iterationsschritt des gedämpften Jacobi–Verfahrens der Fehler

$$e^i = u_h^i - u_h = \sum_{k=1}^{n-1} \rho_k z^k$$

transformiert wird zu

$$e^{i+1} = u_h^{i+1} - u_h = \sum_{k=1}^{n-1} \rho_k \mu^k(\omega) z^k\ .$$

Aufgabe 15: (7+7 Punkte)

i) Sei $N = \frac{1}{h} = 2^p,\ p \in \mathbb{N}$. Die Restriktionsabbildung eines Mehrgitterverfahrens $I_h^{2h} : \mathbb{R}^{(N-1)^2} \to \mathbb{R}^{(\frac{N}{2}-1)^2}$ sei definiert durch den Restriktionsoperator

$$I_h^{2h} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & & & & & & \\ & & 1 & 2 & 1 & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass

$$I_h^{2h}\ z_h^k = \begin{cases} \cos^2 \frac{k\pi h}{2}\ z_{2h}^k\ , & k = 1, \ldots, \frac{N}{2} - 1 \\ -\sin^2 \frac{(N-k)\pi h}{2}\ z_{2h}^{N-k}\ , & k = \frac{N}{2}, \ldots, N-1 \end{cases}$$

mit

$$z_h^k = (\sin(\pi k x_j))_{j=1}^{N-1}\ , \quad k = 1, \ldots, N-1\,, \quad x_j = j \cdot h, \quad h = \frac{1}{N}\,.$$

ii) Sei $N = \frac{1}{h} = 2^p,\ p \in \mathbb{N}$. Die Prolongationsabbildung eines Mehrgitterverfahrens $I_{2h}^h : \mathbb{R}^{(\frac{N}{2}-1)^2} \to \mathbb{R}^{(N-1)^2}$ sei definiert durch den Prolongationsoperator

$$I_{2h}^h = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ 2 & & & \\ 1 & 1 & & \\ & 2 & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & 2 \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass

$$I_{2h}^h\ z_{2h}^k = \cos^2 \frac{k\pi h}{2}\ z_h^k - \sin^2 \frac{k\pi h}{2}\ z_h^{N-k}\ , \quad k = 1, \ldots, \frac{N}{2} - 1$$

mit

$$z_h^k = (\sin(\pi k x_j))_{j=1}^{N-1}\ , \quad k = 1, \ldots, N-1\,, \quad x_j = j \cdot h, \quad h = \frac{1}{N}\,.$$

Aufgabe 16: (3+3 Punkte)

Es seien B eine invertierbare Matrizen und die Vektoren $u, v \leq 0$.

i) Zeigen Sie: Das Rank-1-Update
$$A := \begin{pmatrix} 1 & v^\top \\ u & B \end{pmatrix}$$
ist ebenfalls invertierbar und dessen Inverse ist durch folgende Version der *Sherman-Morrison-Woodbury* Formel bestimmt
$$A^{-1} := \frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda v^\top (B - uv^\top)^{-1} \\ -B^{-1}u & \lambda (B - uv^\top)^{-1} \end{pmatrix}.$$
Dabei sei $\lambda := 1 - v^\top B^{-1} u \neq 0$.

ii) Zeigen Sie: A ist eine M Matrix, falls $v^\top B^{-1} u < 1$ und sowohl $B - uv^\top$, als auch B M-Matrizen sind.

Hinweis: A ist eine M-Matrix genau dann, wenn A^{-1} existiert und komponentenweise $A^{-1} \geq 0$.