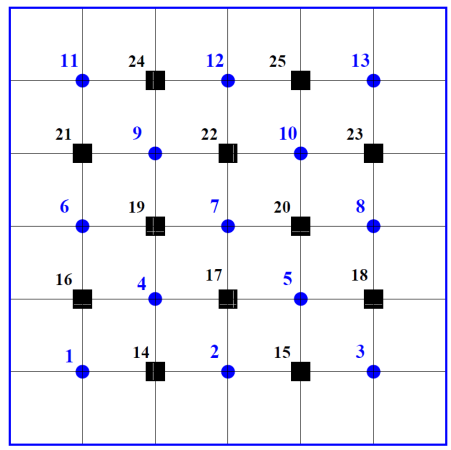
Numerik der Differentialgleichungen (WS 2013/14)

Übungsblatt 8 — Abgabe: Mo, 9. Dezember 2013, bis 16^{00} Uhr,

Sachs/Groß — Kasten mit Aufschrift *Numerik der Dgl.* im 1. Stock des E-Gebäudes

Wir wünschen euch eine besinnliche Adventszeit!

Aufgabe 11: (8 Punkte)



Betrachten Sie die partielle Differentialgleichung

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f, \text{ auf } \Omega \\ u &= \phi, \text{ auf } \Gamma = \partial\Omega \end{aligned}$$

wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein quadratisch beschränktes Gebiet ist und $f \in C(\Omega)$, $\phi \in C(\Gamma)$.

Neben der lexikographischen Nummerierung ist die Schachbrett-Anordnung eine gebräuchliche Methode, die inneren Gitterpunkte eines Gebietes zu nummerieren. Dabei werden die inneren Gitterpunkte wie bei einem Schachbrett zunächst in weiße und schwarze Punkte unterteilt, dann nummeriert man erst die weißen und dann die schwarzen Gitterpunkte lexikographisch, wie in der obigen Abbildung für $n = 5$ angedeutet.

Bilden Sie die darstellende Matrix L_h mit der Schachbrett-Anordnung der Diskretisierung zur obigen Laplacegleichung und bestimmen Sie das zugehörige Gleichungssystem. Welche Struktur und Charakterisierung hat diese Matrix? Welche numerischen Löser lassen sich anwenden?

Aufgabe 12: (8 Punkte)

Betrachten Sie die PDE:

$$\begin{aligned} -\triangle u &= 0 && \forall (x,y) \in \Omega = (0,1) \times (0,1) \\ u(x,y) &= \cos(2x\pi) && \forall (x,y) \in \partial\Omega \end{aligned}$$

Verwenden Sie anstatt der bekannten 5-Punkte Formel folgende Approximation (9-Punkte Formel) an den Laplace Operator

$$\begin{aligned} (\triangle_h u)(x,y) \approx \frac{1}{6h^2}[&-20u(x,y) + 4[u(x-h,y) + u(x+h,y) + u(x,y+h) + u(x,y-h)] \\ &+ u(x-h,y-h) + u(x+h,y-h) + u(x-h,y+h) + u(x+h,y+h)] \end{aligned}$$

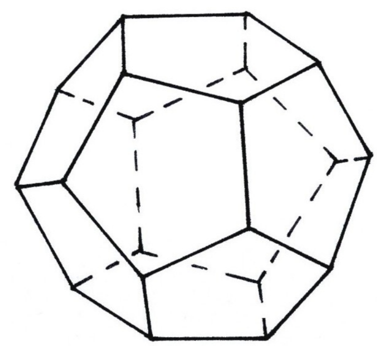
und bestimmen Sie die daraus resultierende (lexikographische) Diskretisierungsmatrix L_h.

Aufgabe 13: (8 + 10* Punkte)

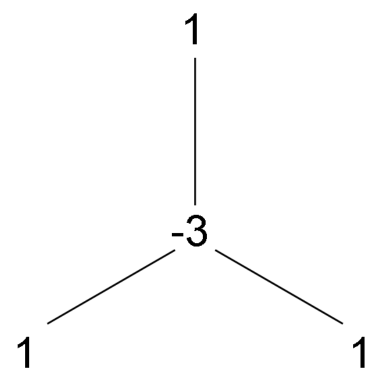
Betrachten Sie die partielle Differentialgleichung

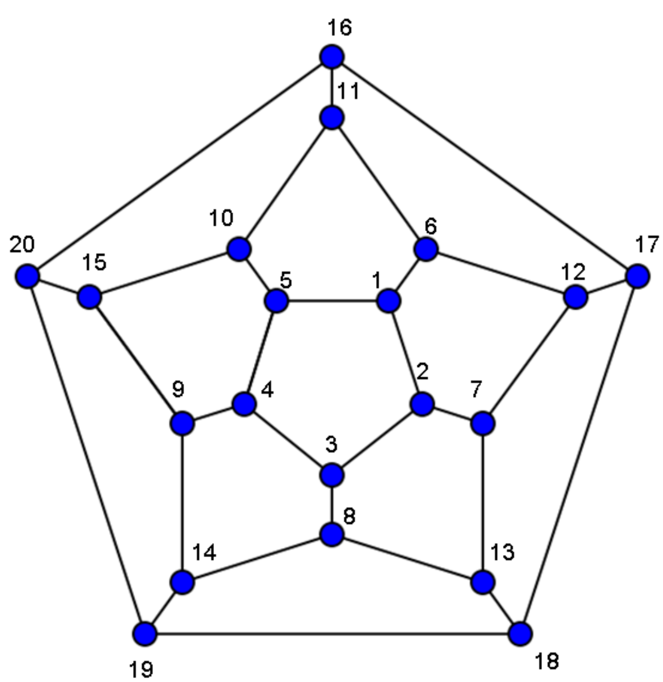
$$-\Delta u = f, \text{ auf } \Omega$$

wobei Ω die Oberfläche einer Kugel ist.
Wenn man diese Kugeloberfläche äquidistant diskritisiert bekommt man sogenannte Fullurene, wie den rechts dargestellten Dodekaeder, einem Platonischen Körper bestehend aus zwölf Fünfecken.



1. Bilden Sie die darstellende Matrix L_h, indem Sie die nebenstehende 4-Punkte Formel und untenstehende lexikographische Anordnung der Punkte auf dem (regulären, planaren) Graph des Dodekaeders (vgl. Schlegeldiagramm) anwenden.





2. Als Zusatzaufgabe können Sie auch noch die darstellende Matrix L_h bilden, die aus der 'Fußball-Diskretisierung' hervorgeht. Dazu sei die Oberfläche der Kugel mit 60 äquidistanten Punkten so diskretisiert, dass sie der Anordnung der weißen und schwarzen Flächen eines Fußballs (Ikosaederstumpf) entspricht, also 12 Fünfecken und 20 Sechsecken.