Numerik der Differentialgleichungen (WS 2013/14)

Übungsblatt 4 — Abgabe: Mo, 11. November 2013, bis 16^{00} Uhr,

Sachs/Groß — Kasten mit Aufschrift *Numerik der Dgl.* im 1. Stock des E-Gebäudes

Aufgabe 5: (8 Punkte)

Beweisen Sie, dass die Trapezregel absolut stabil ist.

Hinweis: Rechenregeln für komplexe Zahlen

Aufgabe 6: (10 Punkte)

Sei $f \in C^q(\mathbb{R} \times [a, b])$. Zeigen Sie: Das lineare Mehrschrittverfahren

$$\eta_{i+1} = \sum_{j=0}^{r} a_j \eta_{i-j} + h \sum_{j=-1}^{r} b_j f(x_{i-j}, \eta_{i-j})$$

ist genau dann konsistent von der Ordnung q, wenn gilt:

$$\begin{gathered} \textstyle\sum_{j=0}^{r} a_j = 1, \quad \sum_{j=-1}^{r} b_j - \sum_{j=0}^{r} j a_j = 1 \\ \textstyle\sum_{j=0}^{r} (-j)^p a_j + p \sum_{j=-1}^{r} (-j)^{p-1} b_j = 1, \quad p = 2, \ldots, q \end{gathered}$$

Aufgabe 7: (6 Punkte)

Bestimmen Sie theoretisch (siehe dazu Aufgabe 6) die Konsistenzordnung des Mehrschrittverfahrens:

$$\eta_{i+1} = \eta_{i-3} + \frac{h}{3}(8f_i - 4f_{i-1} + 8f_{i-2})$$

Verifizieren Sie ihre Ergebnisse zusätzlich numerisch mit Hilfe von MATLAB.

Hinweis: Wählen sie eine AWA und werten Sie geeignete Quotienten aus.

Programmieraufgabe 3: (10 Punkte)

Gegeben sei das folgenden expliziten dreistufige Runge-Kutta-Verfahren:

$$\begin{aligned}
\eta_{i+1} &= \eta_i + h\left(\frac{1}{6}k_1 + \frac{4}{6}k_2 + \frac{1}{6}k_3\right)\\
k_1 &= f(x_i, \eta_i)\\
k_2 &= f(x_i + \frac{1}{2}h, \eta_i + \frac{h}{2}k_1)\\
k_3 &= f(x_i + h, \eta_i - hk_1 + 2hk_2)
\end{aligned}$$

i) Prüfen Sie anhand des Anfangswertproblems $y'(x) = -y(x) + x + 1,\ y(0) = 1$ (exakte Lösung: $y(x) = e^{-x}+x$) numerisch nach, dass das oben angegebene Runge-Kutta-Verfahren 3. Ordnung für dieses Beispiel auf dem Intervall $[0, 10]$ wirklich die globale Konvergenzordnung 3 besitzt. Werten Sie dazu geeignete Quotienten aus.

ii) Programmieren Sie zum Aufgabenteil i) die Richardson-Korrektur (Richardson-Extrapolation), indem Sie

$$\widehat{\eta_i} = \eta_i(\frac{h}{2}) + \frac{\eta_i(\frac{h}{2}) - \eta_i(h)}{2^k - 1}$$

berechnen. Wobei $k = 3$ die Ordnung des zugrunde liegenden Verfahrens ist.
Welche Konvergenzordnung können Sie numerisch nachweisen? Werten Sie dazu ebenfalls geeignete Quotienten aus und vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit denen aus Aufgabenteil i).

Programmierhinweise

Laden Sie den Matlab-Quellcode versehen mit Namen und Matrikelnummer im StudIP hoch.

`NachnameMatrikelnummerAufgabennummer.txt oder .m`

In der den ersten Zeilen des `m-file` stehen mit `%` auskommentiert:

- Name
- Matrikelnummer
- Aufgabennummer
- Datum

Drucken Sie ebenfalls den die Ergebnisse (Tabellen und Graphen) der Programmieraufgabe aus und geben Sie diese zusammen mit dem Übungszettel ab.
Kommentieren Sie immer die Ergebnisse!