Numerik der Differentialgleichungen (WS 2013/14)

Übungsblatt 3 — Abgabe: Mo, 4. November 2013, bis 16^{00} Uhr,

Sachs/Groß — Kasten mit Aufschrift *Numerik der Dgl.* im 1. Stock des E-Gebäudes

Aufgabe 4: (8 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^n \times [a,b] \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig bzgl. y , d.h.

$$\|f(y_1,x) - f(y_2,x)\| \leq L\|y_1 - y_2\| \quad \forall\, y_1,\, y_2 \in \mathbb{R}^n,\ x \in [a,b].$$

Beweisen Sie, dass das Heun-Verfahren und das verbesserte Heun-Verfahren jeweils asymptotisch stabil sind.
Betrachten Sie dazu das Heun-Verfahren

$$\eta_{i+1} = \eta_{i+1} = \eta_i + h\underbrace{\frac{1}{2}\left(f(x_i,\eta_i) + f(x_i + h, \eta_i + hf(x_i,\eta_i))\right)}_{f_h(\eta_i,x_i)}$$

und das verbesserte Heun-Verfahren

$$\eta_{i+1} = \eta_i + h\underbrace{\frac{1}{4}\left(f(x_i,\eta_i) + 3f(x_i + \frac{2h}{3}, \eta_i + \frac{2h}{3}f(x_i + \frac{h}{3}, \eta_i + \frac{h}{3}f(x_i,\eta_i)))\right)}_{f_h(\eta_i,x_i)}$$

TIPP: Beweisen Sie, dass auch f_h Lipschitz-stetig bzgl. y ist.

Programmieraufgabe 2: (6 Punkte)

Die Population des Fichtenknospen-Wurms wird auch, anders als in der Programmieraufgabe 1), durch folgendes **saisonales Populationsmodell** beschrieben:

$$\begin{aligned} P'(t) &= aKP(t) - aP^2(t) + \sqrt{P(t)}\left(\sin^2(\frac{\pi}{2}t) - \cos(\frac{\pi}{2}t)\right), \quad 0 \leq t \leq T \\ P(0) &= P_0. \end{aligned}$$

Im folgenden seien wieder $a = 0.1$, $K = 20$ und $T = 5$.

Programmieren Sie mit **MATLAB** das explizite Euler-Verfahren, das Heun-Verfahren und das verbesserte Heun-Verfahren $(*)$, zur Lösung der obigen Differentialgleichung mit den Schrittweiten $h = \frac{T}{2^m}$, $m = 1, 2, \ldots, 13$ und Anfangswert $P_0 = 2$. Für jede Schrittweite h berechnen Sie dazu den Fehler

$$\epsilon(h) := \max_{i=1,\ldots,n} \left|\eta_i^h - \eta_i^{\frac{h}{2}}\right|,$$

wobei $x_i = 0 + hi$ $i = 1, \ldots, n$ und n Anzahl der Diskretisierungspunkte, welche aus der Wahl der Schrittweite resultiert. Geben Sie die Quotienten $\epsilon(h)$, $\epsilon(h)/h$, $\epsilon(h)/h^2$, $\epsilon(h)/h^3$, $\epsilon(h)/h^4$ tabellarisch aus. Welche Ordnungen können Sie aus der Tabelle ablesen? Vergleichen Sie ihre Ergebnisse mit denen aus der Programmieraufgabe 1).
Drucken Sie die Graphen des berechneten Populationsbestandes η auf dem Intervall $[0, 5]$ für die 2 Schrittweiten $h = \frac{1}{4}, \frac{1}{2^{10}}$ aus und beschreiben Sie Ihre Beobachtungen.

Programmierhinweise

Laden Sie den Matlab-Quellcode versehen mit Namen und Matrikelnummer im StudIP hoch.

`NachnameMatrikelnummerAufgabennummer.txt oder .m`

In der den ersten Zeilen des `m-file` stehen mit `%` auskommentiert:

- Name
- Matrikelnummer
- Aufgabennummer
- Datum

Drucken Sie ebenfalls den die Ergebnisse (Tabellen und Graphen) der Programmieraufgabe aus und geben Sie diese zusammen mit dem Übungszettel ab.
Kommentieren Sie immer die Ergebnisse!