Numerik der Differentialgleichungen (WS 2013/14)

Übungsblatt 2 — Abgabe: Mo, 28. Oktober 2013, bis 16^{00} Uhr,

Sachs/Groß — Kasten mit Aufschrift *Numerik der Dgl.* im 1. Stock des E-Gebäudes

Die Übungsaufgaben können in Zweiergruppen abgegeben werden.

Aufgabe 2: (3+3 Punkte)

i) Betrachten Sie das Anfangswertproblem $y'(x) = f(x, y(x)),\ y(x_0) = y_0$ wobei f zweimal stetig differenzierbar sei. Zeigen Sie, dass das verbesserte Euler-Verfahren

$$\eta_{i+1} = \eta_i + hf\left(x_i + \frac{h}{2}, \eta_i + \frac{h}{2} f(x_i, \eta_i)\right)$$

die Konsistenzordnung 2 besitzt.

ii) Zeigen Sie ebenfalls, unter den Vorraussetzungen aus i), dass das Heun-Verfahren

$$\eta_{i+1} = \eta_i + \frac{h}{2}\left(f(x_i, \eta_i) + f(x_i + h, \eta_i + hf(x_i, \eta_i))\right)$$

die Konsistenzordnung 2 besitzt.

Aufgabe 3: (1+1+1+1 Punkte)

Seien $\epsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, $M_\epsilon, h_\epsilon \in \mathbb{R}_+ = (0, \infty)$, dann gilt

$$\epsilon(h) = \mathcal{O}(h^k) :\Leftrightarrow |\epsilon(h)| \leq M_\epsilon h^k \quad \forall h \in (0, h_\epsilon]$$

Zeigen Sie nun, dass folgende *Rechenregeln* gelten:
Seien dazu $a, b, c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ konstant gegeben. Außerdem gelte

$$a = \mathcal{O}(h), \quad b = \mathcal{O}(h^2), \quad c = \mathcal{O}(\frac{h^2}{2})$$

1. $\alpha a = \mathcal{O}(h)$
2. $a + b = \mathcal{O}(h)$
3. $b + c = \mathcal{O}(h^2)$
4. $ab = \mathcal{O}(h^3)$