Numerik der Differentialgleichungen (WS 2013/14)

Übungsblatt 14 — Abgabe: Mo, 3. Februar 2014, bis 16^{00} Uhr,

Sachs/Groß — Kasten mit Aufschrift *Numerik der Dgl.* im 1. Stock des E-Gebäudes

Aufgabe 23: (5+4+1 Punkte)

Maximumsprinzip: Sei u eine klassische Lösung der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} -\Delta u + u_t &= f && \text{für } x \in \Omega \text{ und } t \geq 0 \\ u(x,t) &= 0 && \text{für } x \in \Gamma = \partial\Omega \text{ und } t \geq 0 \\ u(x,0) &= u_0(x) && \text{für } x \in \Omega \end{aligned}$$

mit $f(x,t) \leq 0$ für alle $(x,t) \in \Omega \times [0,T]$ mit $T < \infty$.
Dann nimmt die Funktion u ihr Maximum auf dem Rand Γ des Gebietes Ω oder für den Anfangszeitpunkt $t = 0$ an.

i) Beweisen Sie das obige Maximumsprinzip für parabolische Differentialgleichungen.

ii) Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Maximumsprinzip und den Eigenschaften einer M-Matrix? Erläutern Sie dazu auch, inwiefern dieser Zusammenhang numerisch relevant ist.

iii) Welche praktische Interpretation lässt das Maximumsprinzip zu, falls u die Temperaturverteilung in einem Körper Ω angibt.

Programmieraufgabe 9: (5+3+2+1 Punkte)

Im Zuge der Produktion von tiefgekühlter Lasagne erfolgt nach dem Vorbacken eine Schockfrostung mittels einer Temperatur von -50 Grad Celsius. Wie lange muss die Lasagne schockgefrostet werden, bis der wärmste Punkt der Lasagne auf -18 Grad Celsius abgekühlt ist?

Zur Beantwortung dieser Frage wird der Abkühlprozess mathematisch mittels einer zweidimensionalen Wärmeleitungsgleichung modelliert. Die Grundfläche der Lasagne betrage 1 dm × 1 dm. Ferner wird angenommen, dass die Temperatur der Lasagne zu Beginn des Abkühlprozesses einheitlich +50 Grad Celsius beträgt. Insgesamt ergibt sich das folgende mathematische Modell:

$$\begin{aligned} u_t(x,y) &= \kappa(u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y)) \quad \text{in } \Omega := (0,1) \times (0,1) \qquad (1) \\ u(0,x,y) &= +50 \quad \forall (x,y) \in \Omega \\ u(t,x,y) &= -50 \quad \forall (t,x,y) \in (0,T) \times \partial\Omega \end{aligned}$$

wobei $\kappa := 2.7 \cdot 10^{-3} \mathrm{dm}^2/\mathrm{min}$ den Wärmeleitungskoeffizienten bezeichnet.

Implementieren Sie zur Lösung der PDE (1) die Linienmethode

$$\frac{1}{\Delta t}\left(\vec{u}_h^{k+1} - \vec{u}_h^{k}\right) = \sigma \frac{\kappa}{h^2} A_h \vec{u}_h^{k+1} + (1-\sigma)\frac{\kappa}{h^2} A_h \vec{u}_h^{k} + \frac{\kappa}{h^2}\vec{q}_h \ , \quad \vec{u}_h^0 = \begin{pmatrix} 50 \\ \vdots \\ 50 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$A_h = \begin{pmatrix} T & I & & & \\ I & T & I & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & I & T & I \\ & & & I & T \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} -4 & 1 & & & \\ 1 & -4 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -4 & 1 \\ & & & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

wobei $\vec{q}_h$ durch die Berücksichtigung der Randbedingung entsteht und $\sigma \in [0,1]$ das Verfahren zur Diskretisierung in Zeitrichtung bestimmt. Verwenden Sie zur Diskretisierung in Ortsrichtung die Schrittweite $h := 1/(N+1)$ und in Zeitrichtung $\Delta t := T/(N_t - 1)$. Speichern Sie alle Matrizen im *sparse*-Format und lösen Sie das aus (2) resultierende lineare Gleichungssystem mittels des \-Operators in Matlab.

i) Starten Sie Ihr Verfahren für $N = 11$, $T = 30$, $N_t = 15$ und $\sigma = 1$ (implizites Euler-Verfahren in Zeitrichtung). Plotten Sie für jeden Zeitpunkt $k = 0, ..., N_t - 1$ Ihre Lösung $\vec{u}_h^k$ einschließlich der Randbedingung mittels des Matlab-Befehls *surf*. Verwenden Sie nach jedem Plot das Kommando *pause*, damit eine schrittweise Betrachtung der Temperaturentwicklung im Zeitverlauf möglich ist. Was können Sie beobachten?

ii) Lösen Sie die PDE nun für die Parameter $N = 11$, $T = 30$, $N_t = 43$ und $\sigma = 0$. Welchen Effekt können Sie nun beobachten? Was passiert, wenn Sie N_t auf 48 erhöhen? Können Sie das anschauliche Verhalten der Lösung auch analytisch begründen? Wie ändert sich das Verhalten der Lösung, wenn Sie $\sigma = 1$ wählen?

iii) Experimentieren Sie nun für $N = 11$, $T = 30$ und $\sigma = 0.5$ (Crank-Nicolson) mit der Anzahl der Schritte N_t in Zeitrichtung. Kommentieren Sie Ihre Ergebnisse. Vergleichen Sie das Verhalten des Crank-Nicolson-Verfahrens insbesondere mit dem expliziten und dem impliziten Euler-Verfahren.

iv) Plotten Sie zusätzlich die Maximaltemperatur der Lasagne in Ω im Zeitverlauf für variierendes T. Beantworten Sie nun die Eingangs gestellte Frage wie lange die Lasagne schockgefrostet werden muss bis auch der wärmste Punkt auf -18 Grad Celsius abgekühlt ist.

Programmierhinweise

Laden Sie den Matlab-Quellcode versehen mit Namen und Matrikelnummer im StudIP hoch.

`NachnameMatrikelnummerAufgabennummer.txt oder .m`

In der den ersten Zeilen des `m-file` stehen mit `%` auskommentiert:

- Name
- Matrikelnummer
- Aufgabennummer
- Datum

Drucken Sie ebenfalls den die Ergebnisse (Tabellen und Graphen) der Programmieraufgabe aus und geben Sie diese zusammen mit dem Übungszettel ab.
Kommentieren Sie immer die Ergebnisse!