Numerik der Differentialgleichungen (WS 2013/14)

Übungsblatt 13 — Abgabe: Mo, 27. Januar 2014, bis 16^{00} Uhr,

Sachs/Groß — Kasten mit Aufschrift *Numerik der Dgl.* im 1. Stock des E-Gebäudes

Aufgabe 20: (3 Punkte)

Sei $(H, (\cdot,\cdot))$ Hilbertraum und $||\cdot|| = \sqrt{(\cdot,\cdot)}$. Ferner sei $a : H \times H \to \mathbb{R}$ eine stetige und koerzive Bilinearform. Zeigen Sie, dass die Matrix

$$A = (a(h_i, h_j))_{i,j=1}^n$$

positiv definit ist, falls $h_1, \dots, h_n \in H$ linear unabhängige Funktionen sind.

Aufgabe 21: (5 Punkte)

Sei $V = C^1[0,1]$. Sind dann für $u, v \in V$

1. $(u,v)_1 := \int_0^1 u'(t)v'(t)dt$ ein Skalarprodukt auf $V \times V$ beziehungsweise
2. $||u|| := \sqrt{(u,u)_1}$ eine Norm in V?

Aufgabe 22: (6+8 Punkte)

Betrachten Sie für $\Omega := (a,b) \subset \mathbb{R}^2$ das Randwertproblem

$$\begin{gathered}(su'')'' - (pu')' + qu = f \qquad \text{auf } (a,b)\\ u(a) = u'(a) = u(b) = u'(b) = 0\\ u \in C^4[a,b],\ s \in C^2[a,b],\ p \in C^1[a,b],\ q, f \in C[a,b].\end{gathered}$$

i) Zeigen Sie, dass daraus als schwache Formulierung die Gleichung

$$b(u,v) = l(v) \quad \forall v \in V := \{v \in C^2[a,b] \ : \ v(a) = v'(a) = v(b) = v'(b) = 0\}$$

resultiert, wobei

$$\begin{aligned} b(u,v) &:= \int_a^b (su''v'' + pu'v' + quv)dx \\ l(v) &:= \int_a^b fv dx. \end{aligned}$$

ii) Betrachten Sie nun den Hilbertraum H_0^2 mit der zugehörigen Norm

$$\|v\|_{H^2} := \left(\|v\|_{L^2}^2 + \|v'\|_{L^2}^2 + \|v''\|_{L^2}^2\right)^{1/2}.$$

Untersuchen Sie nun ausführlich, ob für Funktionen $s, p, q \in L^\infty(a,b)$, $f \in L^2(a,b)$ mit

$$s(t) \geq c > 0,\; p(t) \geq 0,\; q(t) \geq 0 \quad \text{fast sicher auf } [a,b]$$

eine eindeutige Lösung $u \in H_0^2(a,b)$ der Variationsgleichung

$$b(u,v) = l(v) \quad \forall v \in H_0^2(a,b)$$

mit Bilinearform $b(\cdot,\cdot)$ und Funktional $l(\cdot)$ wie in i) existiert?
Hinweis: Lemma von Lax-Milgram