Numerik der Differentialgleichungen (WS 2013/14)

Übungsblatt 12 — Abgabe: Mo, 20. Januar 2014, bis 16^{00} Uhr,

Sachs/Groß — Kasten mit Aufschrift *Numerik der Dgl.* im 1. Stock des E-Gebäudes

Aufgabe 17: (6+4 Punkte)

i) Wie können Sie den Exkurs bezüglich des Raumes der Testfunktionen $C_0^\infty(\Omega)$ im Anhang dieses Übungsblattes anschaulich beschreiben? Beschreiben Sie insbesondere auch die Rolle der Funktionen ψ, ψ_ϵ sowie u_ϵ.

   Hinweis: Konzentrieren Sie sich anfangs auf den eindimensionalen Fall ($n = 1$), da hier eine graphische Interpretation leichter fällt.

ii) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Ferner seien $u, v \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$:

$$L^1_{\text{loc}}(\Omega) := \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R}, \text{ messbar, mit } \int_K |u(x)| d\lambda_n(x) < \infty \ \forall \ K \subset \Omega \text{ kompakt} \right\}$$

   Ferner gelte $\int_\Omega u(x)\phi(x)d\lambda_n(x) = \int_\Omega v(x)\phi(x)d\lambda_n(x) \ \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Zeigen Sie unter Verwendung der Aussagen des Exkurses zum Raum der Testfunktionen $C_0^\infty(\Omega)$, dass dann folgt: $u = v$ fast sicher.

Aufgabe 18: (3+3+2 Punkte)

Sei $\Omega := (a, b) \subset \mathbb{R}$. $u \in L^2(\Omega)$ besitzt die schwache Ableitung Du, falls $Du \in L^2(\Omega)$ und

$$\int_\Omega Du(x)\phi(x)dx = -\int_\Omega u(x)\phi'(x)dx \qquad \forall \, \phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

i) Zeigen Sie: Falls die schwache Ableitung existiert, so ist sie fast sicher eindeutig.

ii) Beweisen Sie ferner: Falls $u \in C^1[a, b]$, existiert die schwache Ableitung Du und stimmt fast sicher mit der klassischen Ableitung u' überein.

iii) Berechnen Sie die schwache Ableitung von $f : (-2\pi, 2\pi) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) := |\sin(x)|$.

Aufgabe 19: (2+2+2 Punkte)

i) Berechnen Sie die schwache Ableitung von $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := |x|.$$

ii) Berechnen Sie die schwache Ableitung von $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$g(x) := \begin{cases} x^2, & x \in [-1, 0) \\ x, & x \in [0, 1]. \end{cases}$$

iii) Diskutieren Sie den Fall für die Funktion $h : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$h(x) := \begin{cases} x^2, & x \in [-1, 0) \\ x + 1, & x \in [0, 1]. \end{cases}$$

Exkurs zum Raum der Testfunktionen $C_0^\infty(\Omega)$

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Betrachten Sie den Raum der *Testfunktionen*

$$C_0^\infty(\Omega) := \{\phi : \Omega \to \mathbb{R},\ \phi \in C^\infty(\Omega) : \mathrm{supp}(\phi) \text{ kompakt},\ \mathrm{supp}(\phi) \subset \Omega\}$$

wobei $\mathrm{supp}(\phi)$ den *Support* (Träger) von ϕ bezeichnet:

$$\mathrm{supp}(\phi) := \overline{\{x \in \Omega : \phi(x) \neq 0\}}$$

Dann gilt für die Funktionen $\psi, \psi_\epsilon : \Omega \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\begin{aligned}\psi(x) &:= c \cdot exp\left(\frac{1}{\|x\|_2^2 - 1}\right) \cdot 1_{\{x:\|x\|<1\}}, \quad c := \left(\int_{\{x:\|x\|<1\}} exp\left(\frac{1}{\|x\|_2^2-1}\right) dx\right)^{-1} \\ \psi_\epsilon(x) &:= \frac{1}{\epsilon^n}\psi\left(\frac{x}{\epsilon}\right), \quad \epsilon > 0\end{aligned}$$

dass $\psi, \psi_\epsilon \in C_0^\infty(\Omega)$. Auf Basis dessen kann man für beliebiges $u \in M$,

$$M := \{u \in L^1(\Omega)\ :\ \mathrm{supp}(u) \subset \Omega \text{ kompakt},\ \mathrm{dist}(\mathrm{supp}(u), \partial\Omega) > 0\}$$

zeigen, dass für $u_\epsilon(x) := \int_{\mathbb{R}^n} u(y)\psi_\epsilon(x-y)d\lambda_n(y)$ folgt: Falls $\epsilon < \mathrm{dist}(\mathrm{supp}(u), \partial\Omega)$, so ist $u_\epsilon \in C_0^\infty(\Omega)$. Ferner gilt:

$$\lim_{\epsilon \to 0+} \|u_\epsilon - u\|_{L^1} = 0$$

Insbesondere folgt also, dass $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in der Menge M ist.