Numerik der Differentialgleichungen (WS 2013/14)

Übungsblatt 10 — Abgabe: Mo, 6. Januar 2014, bis 16^{00} Uhr,

Sachs/Groß — Kasten mit Aufschrift *Numerik der Dgl.* im 1. Stock des E-Gebäudes

Programmieraufgabe 7: (15 Punkte)

Die Berechnung von Optionspreisen kann über die bekannte Black-Scholes Differentialgleichung erfolgen. Bei einer europäischen Call-Option sucht man zu gegebenem Strike-Preis B und gegebener Maturity T den Preis der Option $C(t,K)$ abhängig von der Zeit $t \in [0,T]$ und dem Kurs des Underlyings $0 < K \in \mathbb{R}$ durch Lösung der Black-Scholes-PDE:

$$\begin{aligned}
&C_t(t,K) = -\frac{\sigma^2}{2} K^2 C_{KK}(t,K) - rKC_K(t,K) + rC(t,K) \quad \text{auf } [0,T) \times (0,\infty) \\
&\text{Endbedingung: } C(T,K) = \max\{K - B, 0\} \quad \forall K \in (0,\infty) \\
&\text{Randbedingung: } C(t,0) = 0 \quad \forall t \in [0,T]
\end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet $\sigma > 0$ die Volatilität (sowas wie die Varianz) der Aktie und r den Zinssatz einer risikolosen Anlage.

i) Zeigen Sie zunächst, dass folgende Funktion Lösung der obigen Black-Scholes-PDE ist:

$$C(t,K) = K \int_{-\infty}^{d_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-z^2/2}\, dz - B\, \mathrm{e}^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{d_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-z^2/2}\, dz,$$

$$d_1 = \frac{\log(\frac{K}{B}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}, \quad d_2 = \frac{\log(\frac{K}{B}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} = d_1 - \sigma\sqrt{(T-t)}$$

Wobei $N(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-z^2/2}\, dz$ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist, deren erste Ableitung $N'(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$ die Dichtefunktion der Standardnormalverteilung ist.

Die Variablentransformationen $\tau = T - t$ und $x = \ln(K)$ führen zu einer numerisch geeigneteren Form. Mit

$$\begin{aligned}
&u_\tau(\tau,x) = \frac{\sigma^2}{2} u_{xx}(\tau,x) + \Big(r - \frac{\sigma^2}{2}\Big) u_x(\tau,x) - ru(\tau,x) \quad \text{auf } [0,T) \times (-\infty,\infty) \\
&\text{Anfangsbedingung: } u(0,x) = \max\{\mathrm{e}^x - B, 0\} \quad \forall x \in (-\infty,\infty)
\end{aligned}$$

gilt dann $C(t,K) = u(T-t, \ln(K))$. Beschränkt man nun $[0,T) \times (-\infty,\infty)$ zur numerischen Lösung auf ein beschränktes Intervall $[0,T) \times [-G,G]$, so müssen hier neue Randbedingungen eingeführt werden. Es gilt $u(\tau,-G) \approx 0$ und $u(\tau,G) \approx \mathrm{e}^G - B \cdot \mathrm{e}^{-\tau r}$.

Approximation der Ableitungen durch Differenzenquotienten führt dann mit $\Delta x = \frac{1}{N+1}$: Schrittweite in x-Richtung , $\Delta\tau = \frac{1}{M-1}$: Schrittweite in τ-Richtung zu:

$$\frac{1}{\Delta\tau}(u_j^{m+1} - u_j^m) = \frac{\sigma^2}{2}\frac{1}{\Delta x^2}(u_{j+1}^m - 2u_j^m + u_{j-1}^m) + \Big(r - \frac{\sigma^2}{2}\Big)\frac{1}{2\Delta x}(u_{j+1}^m - u_{j-1}^m) - ru_j^m$$

Diese liefert dann folgendes Gleichungssystem:

$$\frac{1}{\Delta\tau}(u^{m+1}-u^m)=\theta\frac{1}{\Delta x^2}Au^{m+1}+(1-\theta)\frac{1}{\Delta x^2}Au^m+\theta f^{m+1}+(1-\theta)f^m$$

mit $A=\begin{pmatrix}\alpha & \beta & & \\ \gamma & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \beta \\ & & \gamma & \alpha\end{pmatrix}$ und $f^m=\begin{pmatrix}\frac{1}{\Delta x^2}\left(\frac{\sigma^2}{2}-\frac{\Delta x}{2}\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\right)u_0^m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{\Delta x^2}\left(\frac{\sigma^2}{2}+\frac{\Delta x}{2}\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\right)u_{N+1}^m\end{pmatrix}$

wobei $\alpha=\sigma^2+\Delta x^2 r$, $\beta=-\frac{\sigma^2}{2}-\frac{\Delta x}{2}\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)$, $\gamma=-\frac{\sigma^2}{2}+\frac{\Delta x}{2}\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)$.
$u_0^m=0$ sowie $u_{N+1}^m=e^G-B\cdot e^{-(m\cdot\Delta\tau)r}$ werden mit Hilfe der Randbedingung gesetzt. Es gilt $A\in\mathbb{R}^{N\times N}$, $f^m\in\mathbb{R}^N$ und $u^m=(u_1^m,\ldots,u_N^m)^T$ mit $u_j^m\approx u(m\cdot\Delta\tau,-G+j\cdot\Delta x)$. Das $\theta\in[0,1]$ in der obigen Formulierung gibt das Diskretisierungsverfahren an.

ii) Programmieren Sie obiges Verfahren zur numerischen Lösung der Black-Scholes-PDE in Matlab. Setzen Sie hierbei $T=0.5$, $\sigma=0.3$, $r=0.03$, $B=50$ und $G=5$. Als Diskretisierungsparameter wählen Sie $N=200$ und $M=10$ und $M=100$. Speichern Sie alle Matrizen im `sparse`-Format und lösen Sie das resultierende Gleichungssystem mittels des \-Operators. Berechnen Sie dann die exakten Ergebnisse mittels der geschlossenen Lösungsformel (`blsprice`) und stellen Sie den Fehler zwischen numerischer und exakter Lösung in einer 3-dimensionalen Grafik dar (Matlab-Befehle `meshgrid` und `surf`). Plotten Sie zusätzlich die numerische und exakte Lösung.

iii) Interpretieren Sie die Resultate bei Variation des Diskretierungsverfahrens ($\theta=0, 0.5$ und 1) und bei Variation der Schrittweiten.

Wir wünschen euch eine schöne Weihnachtszeit und viel Erfolg und Glück im neuen Jahr 2014!