Numerik der Differentialgleichungen (WS 2011/12)

Übungsblatt 9 — Abgabe: Mi, 25. Januar 2012, bis 8^{30} Uhr, *Kasten E6*

Sachs/Groß — im Foyer des E-Gebäudes

Aufgabe 16: (10+8+2 Punkte)

Maximumsprinzip: Sei u eine klassische Lösung der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \Delta u + u_t &= f \qquad &&\text{für } x \in \Omega \text{ und } t \geq 0 \\ u(x,t) &= 0 \qquad &&\text{für } x \in \Gamma = \partial\Omega \text{ und } t \geq 0 \\ u(x,0) &= u_0(x) \qquad &&\text{für } x \in \Omega \end{aligned}$$

mit $f(x,t) \leq 0$ für alle $(x,t) \in \Omega \times [0,T]$ mit $T < \infty$.
Dann nimmt die Funktion u ihr Maximum auf dem Rand Γ des Gebietes Ω oder für den Anfangszeitpunkt $t = 0$ an.

i) Beweisen Sie das obige Maximumsprinzip für parabolische Differentialgleichungen.

ii) Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Maximumsprinzip und den Eigenschaften einer M-Matrix? Erläutern Sie dazu auch, inwiefern dieser Zusammenhang numerisch relevant ist.

iii) Welche praktische Interpretation lässt das Maximumsprinzip zu, falls u die Temperaturverteilung in einem Körper Ω angibt.

Aufgabe 17: (6+2 Punkte)

i) Seien V Vektorraum und $V_h \subset V$ ein (endlich-dimensionaler) Untervektorraum. Weiter sei $a : V \times V \to \mathbb{R}$ eine V-elliptische, stetige Bilinearform.
Zeigen Sie dann, dass die Ritz-Projektion $u_h := R_h u$ genau dann das Variationsproblem

$$a(u,v) = a(u_h,v) \quad \forall v \in V_h$$

löst, wenn es auch Lösung des Minimierungsproblems

$$\min_{v \in V_h} a(u-v, u-v)$$

ist.

ii) Verifizieren Sie die obige Äquivalenz für $V = \mathbb{R}^n$, $V_h = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\}$ und $u = (1,\dots,1)^\top$ mit der Bilinearform

$$a(x,y) = x^\top B y, \text{ wobei } B = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & n \end{pmatrix}.$$