Numerik der Differentialgleichungen (WS 2011/12)

Übungsblatt 8 — Abgabe: Mi, 18. Januar 2012, bis 8^{30} Uhr, *Kasten E6*

Sachs/Groß — im Foyer des E-Gebäudes

Aufgabe 15: (10+12 Punkte)

Betrachten Sie für $\Omega := (a,b) \subset \mathbb{R}^2$ das Randwertproblem

$$(su'')'' - (pu')' + qu = f \quad \text{auf } (a,b)$$
$$u(a) = u'(a) = u(b) = u'(b) = 0$$
$$u \in C^4[a,b],\ s \in C^2[a,b],\ p \in C^1[a,b],\ q, f \in C[a,b].$$

i) Zeigen Sie, dass daraus als schwache Formulierung die Gleichung

$$b(u,v) = l(v) \quad \forall v \in V := \{v \in C^2[a,b] \ : \ v(a) = v'(a) = v(b) = v'(b) = 0\}$$

resultiert, wobei

$$\begin{aligned} b(u,v) &:= \int_a^b (su''v'' + pu'v' + quv)dx \\ l(v) &:= \int_a^b fvdx. \end{aligned}$$

ii) Betrachten Sie nun den Hilbertraum H_0^2 mit der zugehörigen Norm

$$\|v\|_{H^2} := \left(\|v\|_{L^2}^2 + \|v'\|_{L^2}^2 + \|v''\|_{L^2}^2\right)^{1/2}.$$

Untersuchen Sie nun ausführlich, ob für Funktionen $s, p, q \in L^\infty(a,b),\ f \in L^2(a,b)$ mit

$$s(t) \geq c > 0,\ p(t) \geq 0,\ q(t) \geq 0 \quad \text{fast sicher auf } [a,b]$$

eine eindeutige Lösung $u \in H_0^2(a,b)$ der Variationsgleichung

$$b(u,v) = l(v) \quad \forall v \in H_0^2(a,b)$$

mit Bilinearform $b(\cdot,\cdot)$ und Funktional $l(\cdot)$ wie in i) existiert?

Programmieraufgabe 8: (8 Punkte)

Die Berechnung von Optionspreisen kann über die bekannte Black-Scholes Differentialgleichung erfolgen. Bei einer europäischen Call-Option sucht man zu gegebenem Strike-Preis B und gegebener Maturity T den Preis der Option $C(t,K)$ abhängig von der Zeit $t \in [0,T]$ und dem Kurs des Underlyings $0 < K \in \mathbb{R}$ durch Lösung der Black-Scholes-PDE:

$$C_t(t,K) = -\frac{\sigma^2}{2}K^2 C_{KK}(t,K) - rKC_K(t,K) + rC(t,K) \quad \text{auf } [0,T) \times (0,\infty)$$

Endbedingung: $C(T,K) = \max\{K - B, 0\} \quad \forall K \in (0,\infty)$

Randbedingung: $C(t,0) = 0 \quad \forall t \in [0,T]$

Die Variablentransformationen $\tau = T - t$ und $x = \ln(K)$ führen zu einer numerisch geeigneteren Form. Mit

$$\begin{aligned} &u_\tau(\tau, x) = \frac{\sigma^2}{2} u_{xx}(\tau, x) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) u_x(\tau, x) - r u(\tau, x) \quad \text{auf } [0, T) \times (-\infty, \infty) \\ &\text{Anfangsbedingung: } u(0, x) = \max\{\mathrm{e}^x - B, 0\} \quad \forall x \in (-\infty, \infty) \end{aligned}$$

gilt dann $C(t, K) = u(T - t, \ln(K))$. Beschränkt man nun $[0, T) \times (-\infty, \infty)$ zur numerischen Lösung auf ein beschränktes Intervall $[0, T) \times [-G, G]$, so müssen hier neue Randbedingungen eingeführt werden. Es gilt $u(\tau, -G) \approx 0$ und $u(\tau, G) \approx \mathrm{e}^G - B \cdot \mathrm{e}^{-\tau r}$.

Approximation der Ableitungen durch Differenzenquotienten führt dann mit $\Delta x = \frac{1}{N+1}$: Schrittweite in x-Richtung , $\Delta\tau = \frac{1}{M-1}$: Schrittweite in τ-Richtung zu:

$$\frac{1}{\Delta\tau}(u_j^{m+1} - u_j^m) = \frac{\sigma^2}{2} \frac{1}{\Delta x^2}(u_{j+1}^m - 2u_j^m + u_{j-1}^m) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{1}{2\Delta x}(u_{j+1}^m - u_{j-1}^m) - r u_j^m$$

Diese liefert dann folgendes Gleichungssystem:

$$\frac{1}{\Delta\tau}(u^{m+1} - u^m) = \theta \frac{1}{\Delta x^2} A u^{m+1} + (1 - \theta) \frac{1}{\Delta x^2} A u^m + \theta f^{m+1} + (1 - \theta) f^m$$

mit $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & & \\ \gamma & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \beta \\ & & \gamma & \alpha \end{pmatrix}$ und $f^m = \begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta x^2}\left(\frac{\sigma^2}{2} - \frac{\Delta x}{2}\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\right) u_0^m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{\Delta x^2}\left(\frac{\sigma^2}{2} + \frac{\Delta x}{2}\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\right) u_{N+1}^m \end{pmatrix}$

wobei $\alpha = \sigma^2 + \Delta x^2 r$, $\beta = -\frac{\sigma^2}{2} - \frac{\Delta x}{2}\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)$, $\gamma = -\frac{\sigma^2}{2} + \frac{\Delta x}{2}\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)$.

$u_0^m = 0$ sowie $u_{N+1}^m = e^G - B \cdot e^{-(m \cdot \Delta\tau) r}$ werden mit Hilfe der Randbedingung gesetzt. Es gilt $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $f^m \in \mathbb{R}^N$ und $u^m = (u_1^m, \ldots, u_N^m)^T$ mit $u_j^m \approx u(m \cdot \Delta\tau, -G + j \cdot \Delta x)$. $\theta \in [0, 1]$ in der obigen Formulierung gibt das Diskretisierungsverfahren an.

1. Programmieren Sie obiges Verfahren zur numerischen Lösung der Black-Scholes-PDE in Matlab. Setzen Sie hierbei $T = 0.5$, $\sigma = 0.3$, $r = 0.03$, $B = 50$ und $G = 5$. Als Diskretisierungsparameter wählen Sie $N = 200$ und $M = 10$ und $M = 100$. Speichern Sie alle Matrizen im `sparse`-Format und lösen Sie das resultierende Gleichungssystem mittels des \-Operators. Berechnen Sie dann die exakten Ergebnisse mittels der geschlossenen Lösungsformel (`blsprice`) und stellen Sie den Fehler zwischen numerischer und exakter Lösung in einer 3-dimensionalen Grafik dar (Matlab-Befehle `meshgrid` und `surf`). Plotten Sie zusätzlich die numerische und exakte Lösung.

2. Interpretieren Sie die Resultate bei Variation des Diskretierungsverfahrens ($\theta = 0, 0{,}5$ und 1) und bei Variation der Schrittweiten.

Wir wünschen euch Viel Glück und Erfolg im neuen Jahr 2012!