Numerik der Differentialgleichungen (WS 2011/12)

Übungsblatt 6 — Abgabe: Mi, 14. Dezember 2011, bis 8^{30} Uhr, *Kasten E6*

Sachs/Groß — im Foyer des E-Gebäudes

Aufgabe 10: (8+8 Punkte)

Betrachten Sie die partielle Differentialgleichung $-\Delta u(x,y) = f(x,y)$, $(x,y) \in \Omega$ mit Dirichlet-Randbedingung $u(x,y) = \phi(x,y)$, $(x,y) \in \Gamma = \partial\Omega$, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein geeignetes beschränktes Gebiet ist und $f \in C(\Omega)$, $\phi \in C(\Gamma)$.

i) *(Shortley–Weller–Formel)*

Bei der Diskretisierung der obigen Differentialgleichung über nicht-quadratischen Gebieten bedient man sich beispielsweise der folgenden Formel (vergleiche Vorlesung):

$$\Delta_h u = 2\left(\frac{1}{h_y^- + h_y^+}\left(\frac{1}{h_y^-}\ u(x, y - h_y^-) + \frac{1}{h_y^+}\ u(x, y + h_y^+)\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{h_x^- + h_x^+}\left(\frac{1}{h_x^-} u(x - h_x^-, y) + \frac{1}{h_x^+}\ u(x + h_x^+, y)\right) - \left(\frac{1}{h_x^- h_x^+} + \frac{1}{h_y^- h_y^+}\right) u(x,y)\right)$$

wobei h_x^-, h_x^+, h_y^-, h_y^+ die vom Punkt (x,y) ausgehenden Schrittweiten nach links, rechts, unten und oben sind. Beweisen Sie mit $h := \max\{h_x^-, h_x^+, h_y^-, h_y^+\}$:

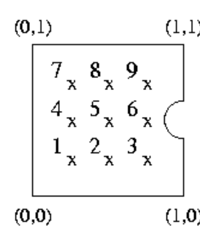
$$\Delta u - \Delta_h u = \frac{1}{3}\ \left((h_x^- - h_x^+)u_{xxx} + (h_y^- - h_y^+)u_{yyy}\right) + O(h^2).$$

ii) Leiten Sie mittels i) die Matrix L_h und das lineare Gleichungssystem her, das aus der Diskretisierung der Potentialgleichung

$$-\Delta u(x,y) = 0$$
$$\phi(x,y) = \sin(\pi x)$$

über dem im folgenden beschriebenen Gebiet Ω resultiert. Was ist der Nachteil der Shortley-Weller-Methode?

Das Gebiet sowie dessen Diskretisierung sind durch das Schaubild rechter Hand gegeben. Für u_i, $i \neq 6$ gilt $h_x^- = h_x^+ = h_y^- = h_y^+ = h := \frac{1}{4}$. Für u_6 ist wie im Schaubild ersichtlich $h_x^- = h_y^- = h_y^+ = h$ und $h_x^+ = \frac{1}{2}h$ zu wählen.



Aufgabe 11: (6+8 Punkte)

Eine Diskretisierung der Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= f(x)\,, \quad x \in \Omega := (0,1) \\ u(0) &= u(1) = 0 \end{aligned}$$

mit Hilfe des Differenzenverfahrens führt mit einer Schrittweite $h = \frac{1}{n}$ auf dem Gitter $\Omega_h := \{x_j = jh,\ j = 1, \dots, n-1\}$ zu einem linearen Gleichungssystems der Gestalt $A_h u_h = f_h$ mit

$$A_h = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \ddots & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} u_h &= (u_{h,1}, \dots, u_{h,n-1})^\top\,, \quad u_{h,i} \approx u(x_i)\,, \\ f_h &= (f(x_1), \dots, f(x_{n-1}))^\top\,. \end{aligned}$$

Zur Lösung des Gleichungssystems $A_h u_h = f_h$ werde das gedämpfte Jacobi–Verfahren

$$\begin{aligned} u_h^{i+1} &= J_h(\omega) u_h^i + \frac{\omega}{2}\, h^2 f_h\,, \\ J_h(\omega) &= (1-\omega)I + \omega(I - D_h^{-1} A_h)\,, \quad D_h = \tfrac{2}{h^2} I \end{aligned}$$

verwendet, das eine Folge u_h^i von Näherungsvektoren für die exakte Lösung u_h erzeugt.

i) Bestimmen Sie die Eigenwerte $\mu^k(\omega)$ der dazu gehörigen Eigenvektoren $z^k = (\sin(\pi jkh))_{j=1}^{n-1}$ der Matrix $J_h(\omega)$. Welche Konsequenzen haben diese Eigenwerte auf die numerische Lösbarkeit obiger Randwertaufgabe?
(**Hinweis:** Aufgabe 5 ii))

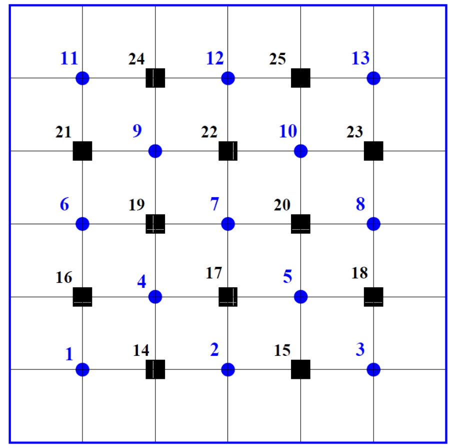
ii) Zeigen Sie, dass nach einem Iterationsschritt des gedämpften Jacobi–Verfahrens der Fehler

$$e^i = u_h^i - u_h = \sum_{k=1}^{n-1} \rho_k z^k$$

transformiert wird zu

$$e^{i+1} = u_h^{i+1} - u_h = \sum_{k=1}^{n-1} \rho_k \mu^k(\omega) z^k\,.$$

Aufgabe 12: (8 Punkte)



Betrachten Sie die partielle Differentialgleichung

$$-\Delta u = f, \text{ auf } \Omega$$
$$u = \phi, \text{ auf } \Gamma = \partial\Omega$$

wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein quadratisch beschränktes Gebiet ist und $f \in C(\Omega)$, $\phi \in C(\Gamma)$.

Neben der lexikographischen Nummerierung ist die Schachbrett-Anordnung eine gebräuchliche Methode, die inneren Gitterpunkte eines Gebietes zu nummerieren. Dabei werden die inneren Gitterpunkte wie bei einem Schachbrett zunächst in weiße und schwarze Punkte unterteilt, dann nummeriert man erst die weißen und dann die schwarzen Gitterpunkte lexikographisch, wie in der obigen Abbildung für $n = 5$ angedeutet.

Bilden Sie die darstellende Matrix L_h mit der Schachbrett-Anordnung der Diskretisierung zur obigen Laplacegleichung und bestimmen Sie das zugehörige Gleichungssystem. Welche Struktur und Charakterisierung hat diese Matrix? Welche numerischen Löser lassen sich anwenden?