Numerik der Differentialgleichungen (WS 2011/12)

Übungsblatt 5 — Abgabe: Mi, 7. Dezember 2011, bis 8^{30} Uhr, *Kasten E6*

Sachs/Groß — im Foyer des E-Gebäudes

Aufgabe 7: (8 Punkte)

Bildet der Raum $C[0,1]$ der auf dem Intervall $[0,1]$ stetigen Funktionen mit dem Skalarprodukt $< f, g >_{L^2} := \int_0^1 f(x)g(x)dx$ einen Hilbertraum?

Hinweis: Betrachten Sie zur Beantwortung der Frage die Funktionenfolge

$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & , x \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}) \\ n\left(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right) & , x \in [\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2}) \\ 1 & , x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Aufgabe 8: (12 Punkte)

Betrachten Sie für gegebenes $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $f \in \mathbb{R}^n$ die Bilinearform $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben durch $b(x, y) = x^T B y$ sowie das lineare Funktional $l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $l(y) := f^T y$.

i) Unter welchen Voraussetzungen ist das Lemma von Lax-Milgram auf das Variationsproblem

$$b(x, y) = l(y) \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \tag{1}$$

anwendbar? Interpretieren Sie ausführlich die Voraussetzungen und Folgerungen des Lemmas für dieses spezielle Problem.

ii) Formulieren Sie für das Problem aus i) unter möglichst schwachen Voraussetzungen ein Lemma, das die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung von (1) sicherstellt.

Aufgabe 9: (10 Punkte)

Seien $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ eine Lösung der allgemeinen Form einer partiellen Differentialgleichung

$$A(x,t)\Delta u + b(x,t)\nabla u = F(u,x,t)$$

Eine solche Differentialgleichung heißt *linear*, falls gilt

$$F(u,x,t) = -f(x,t)u + \widetilde{f}(x,t).$$

Im Falle von $\widetilde{f} = 0$ nennt man die lineare partielle Differentialgleichung *homogen*, ansonsten *inhomogen*.
Der homogenen Differentialgleichung 2. Ordnung in 2 Variablen $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} a(x,y)\frac{\partial^2}{\partial x^2}u + b(x,y)\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}u + c(x,y)\frac{\partial^2}{\partial y^2}u \\ + d(x,y)\frac{\partial}{\partial x}u + e(x,y)\frac{\partial}{\partial y}u + f(x,y)u = 0 \end{aligned}$$

wird die quadratische Form

$$(\xi, \eta) \mapsto \begin{pmatrix} \xi & \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(x,y) & \frac{1}{2}b(x,y) \\ \frac{1}{2}b(x,y) & c(x,y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

zugeordnet. Eine solche Differentialgleichung heißt *an der Stelle* (x,y)

- *elliptisch*, falls die Eigenwerte der obigen Matrix entweder alle positiv oder alle negativ sind.
- *hyperbolisch*, falls ein Eigenwert positiv und einer negativ ist.
- *parabolisch*, falls genau ein Eigenwert 0 ist.

Bestimmen Sie nun den Typ folgender partieller Differentialgleichungen:

i) $u_y + u_{xx} - 5u_{xz} + u_{zy} + \sqrt{u+y} = 0$

ii) $u_{tt} - u_x + \mathrm{e}^x \sqrt{t^2+1} = 0$

iii) $u_{xx} - u_{xy} + 2u_y + u_{yy} - 3u_{yx} + u = 0$

iv) $yu_{xx} - 2u_{xy} + xu_{yy} = 0$

Programmieraufgabe 6: (8 Punkte)

Folgende vier Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}
\dot{T_1} &= \lambda_1 - d_1 T_1 - (1-\epsilon_1) k_1 V_I T_1 \\
\dot{T_1^*} &= (1-\epsilon_1) k_1 V_I T_1 - \delta T_1^* - m_1 E T_1^* \\
\dot{V_I} &= N_T \delta T_1^* - c V_I \\
\dot{E} &= \lambda_E + \frac{b_E T_1^*}{T_1^* + K_b} E - \frac{d_E T_1^*}{T_1^* + K_d} E - \delta_E E
\end{aligned}$$

beschreiben zusammen mit einem Vektor der Anfangswerte $(T_1(0), T_1^*(0), V_I(0), E(0))^\top \in \mathbb{R}^4$ ein einfaches HIV Modell als Anfangswertproblem. Dabei gibt $T_1(t)$ die Population der T-Helferzellen, $T_1^*(t)$ die Population der infizierten T-Helferzellen, $V_I(t)$ die Anzahl der Viren und $E(t)$ die Anzahl der Immunzellen zum Zeitpunkt t wieder.
Verwenden Sie den Matlab ODE Löser `ode23s` um obiges System von DGLen zu lösen.
Als Anfangswert wählen Sie $(1000, 0, 1, 0.01)^\top$, als Zeitrahmen $T = 15$ Tage und verwenden folgende konstante Parameter:

Parameter	Wert	Einheit	Parameter	Wert	Einheit
λ_1	10	$\frac{\text{Zellen}}{mm^3 \cdot \text{Tag}}$	d_1	0.01	$\frac{1}{\text{Tag}}$
k_1	$8 \cdot 10^{-4}$	$\frac{mm^3}{\text{Viren} \cdot \text{Tag}}$	δ	0.7	$\frac{1}{\text{Tag}}$
m_1	0.01	$\frac{mm^3}{\text{Zellen} \cdot \text{Tag}}$	N_T	100	$\frac{\text{Viren}}{\text{Zellen}}$
c	13	$\frac{1}{\text{Tag}}$	λ_E	$1 \cdot 10^{-3}$	$\frac{\text{Zellen}}{mm^3 \cdot \text{Tag}}$
b_E	0.3	$\frac{1}{\text{Tag}}$	K_b	0.1	$\frac{\text{Zellen}}{mm^{-3}}$
δ_E	0.1	$\frac{1}{\text{Tag}}$	K_d	0.5	$\frac{\text{Zellen}}{mm^{-3}}$
d_E	0.25	$\frac{1}{\text{Tag}}$			

Variieren Sie $\epsilon_1 \in \mathbb{R}$ zwischen 0 und 1 und beobachten Sie, wie sich das Verhalten der einzelnen Zellpopulationen verändert.

Hinweis: Hilfreiche Befehle: `global`