Numerik der Differentialgleichungen (WS 2011/12)

Übungsblatt 4 — Abgabe: Mi, 30. November 2011, bis 8^{30} Uhr, *Kasten E6*

Sachs/Groß — im Foyer des E-Gebäudes

Aufgabe 6: (6 Punkte)

Diskretisieren Sie die Randwertaufgabe

$$-y''(x) + f(x, y(x)) = g(x), \quad x \in [0,1], \quad y(0) = y(1) = 0, \quad f \in C^1[0,1], \quad g \in C[0,1]$$

und formulieren Sie das daraus resultierende System nichtlinearer Gleichungen. Wie können Sie dieses System lösen? Stellen Sie einen geeigneten Algorithmus auf.

Programmieraufgabe 5: (10 Punkte)

Betrachten Sie das Randwertproblem

$$-y''(x) + q(x)y(x) = g(x), \quad x \in [0,1], \quad y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta$$

mit $q,\ g \in C[0,1],\ q(x) \geq 0$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Zur Diskretisierung des Differentialoperators $L : C^2[0,1] \to C[0,1]$, $Ly = -y'' + qy$ verwendet man die Matrizen

$$A_n = \frac{1}{h_n^2} \begin{pmatrix} 2 + q_1 h_n^2 & -1 & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 2 + q_n h_n^2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_n = \frac{1}{h_n^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

mit $q_i := q(x_i)$. Als Schrittweite sei $h_n := \frac{1}{n+1}$ gewählt.

i) Berechnen Sie für den Spezialfall $q \equiv 0$ und $\alpha = \beta = 0$ die Eigenwerte und Eigenvektoren des Differentialoperators L, d.h. bestimmen Sie $v \in C^2[0,1], v(0) = v(1) = 0$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $Lv = \lambda v$.

ii) Die Eigenwerte von $\tilde{A}_n$ sind gegeben durch $\lambda_j^n = \frac{4}{h_n^2} \sin^2\left(\frac{\pi}{2} j h_n\right)$, $j = 1, ..., n$. Nutzen Sie dieses Ergebnis, um für den Fall $q \equiv \gamma > 0$ die Konditionen $\operatorname{cond}_2(A_n)$ und $\operatorname{cond}_2(\tilde{A}_n^{-1} A_n)$ zu berechnen. Welchen Grenzwert haben diese Konditionszahlen für $h_n \to 0$ ($\Leftrightarrow n \to \infty$)?

iii) Lösen Sie das obige Randwertproblem für den Spezialfall $q \equiv 10$, $g(x) := e^x$, $\alpha = 1$, $\beta = -1$ und $n = 10, 20, 30, ..., 400$. Verwenden Sie zur Lösung des auftretenden Gleichungssystems den Matlab-CG-Löser `pcg` (siehe Matlab-Hilfe) - einmal ohne und einmal mit Präkonditionierer $\tilde{A}_n$ (entspricht der Option [ ] bzw. $[\tilde{A}_n]$ der `pcg`-Funktion). Wählen Sie als Konvergenztoleranz $\mathrm{TOL} = 10^{-8}$.

Geben Sie für jedes n die Anzahl der benötigten CG-Iterationen mit und ohne Präkonditionierer, $\operatorname{cond}_2(A_n)$ und $\operatorname{cond}_2(\tilde{A}_n^{-1} A_n)$ aus. Was beobachten Sie und wie können Sie dies erklären?

Programmierhinweise

Laden Sie den Matlab-Quellcode (als `txt-file` abgespeichert !!!) versehen mit Namen und Matrikelnummer im StudIP hoch. Die abzugebende Datei muss folgenden Namen haben und dann als Textdatei `.txt` abgespeichert in StudIP hochgeladen werden:

`NachnameMatrikelnummerAufgabennummer.txt`

In der den ersten Zeilen des `m-file` stehen mit `%` auskommentiert:

- Name
- Matrikelnummer
- Aufgabennummer
- Datum

Drucken Sie ebenfalls den die Ergebnisse (Tabellen und Graphen) der Programmieraufgabe aus und geben Sie diese zusammen mit dem Übungszettel ab.
Kommentieren Sie immer die Ergebnisse!