Numerik der Differentialgleichungen (WS 2011/12)

Übungsblatt 3 — Abgabe: Mi, 16. November 2011, bis 8^{30} Uhr, *Kasten E6*

Sachs/Groß — im Foyer des E-Gebäudes

Aufgabe 4: (8 Punkte)

Sei $f \in C^q(\mathbb{R} \times [a,b])$. Zeigen Sie: Das lineare Mehrschrittverfahren

$$\eta_{i+1} = \sum_{j=0}^{r} a_j \eta_{i-j} + h \sum_{j=-1}^{r} b_j f(x_{i-j}, \eta_{i-j})$$

ist genau dann konsistent von der Ordnung q, wenn gilt:

$$\begin{gathered} \textstyle\sum_{j=0}^{r} a_j = 1, \quad \sum_{j=-1}^{r} b_j - \sum_{j=0}^{r} j a_j = 1 \\ \textstyle\sum_{j=0}^{r} (-j)^p a_j + p \sum_{j=-1}^{r} (-j)^{p-1} b_j = 1, \quad p = 2, \ldots, q \end{gathered}$$

Aufgabe 5: (8 Punkte)

Betrachten Sie das Prädiktor-Korrektor-Verfahren mit den folgenden Komponenten:

$$\begin{aligned} \eta_{i+1} &= \eta_{i-1} + \frac{h}{3}(7f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}) && \text{(Prädiktor)} \\ \eta_{i+1} &= \eta_{i-1} + \frac{h}{90}(29f_{i+1} + 124f_i + 24f_{i-1} + 4f_{i-2} - f_{i-3}) && \text{(Korrektor)} \end{aligned}$$

wobei $f_j := f(x_j, \eta_j)$. Wieviele Korrektor-Iterationen müssen durchgeführt werden, damit das Prädiktor-Korrektor-Verfahren die gleiche Konsistenzordnung wie der Korrektor hat? (Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 4).

Programmieraufgabe 4: (8 Punkte)

Betrachten Sie die lineare inhomogene Differentialgleichung

$$\begin{gathered} y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = \mathrm{e}^{2t}\sin(t), \quad 0 \le t \le 1 \\ y(0) = -0,4, \quad y'(0) = -0,6 \end{gathered}$$

deren exakte Lösung durch $y(t) = 0,2\,\mathrm{e}^{2t}(\sin(t) - 2\cos(t))$ gegeben ist. Programmieren Sie zur Lösung dieser Anfangswertaufgabe mit **MATLAB** das Prädiktor-Korrektor-Verfahren PK_k.

Verwenden Sie als Prädiktor das Adams-Bashforth-Verfahren mit Konsistenzordnung 2:

$$\eta_{i+1} = \eta_i + \frac{h}{2} \left(3f(t_i, \eta_i) - f(t_{i-1}, \eta_{i-1})\right)$$

Als Korrektor wähle man das Adams-Moulton-Verfahren mit Konsistenzordnung 4:

$$\eta_{i+1} = \eta_i + \frac{h}{24} \left(9f(t_{i+1}, \eta_{i+1}) + 19f(t_i, \eta_i) - 5f(t_{i-1}, \eta_{i-1}) + f(t_{i-2}, \eta_{i-2})\right)$$

Um die obigen Mehrschrittverfahren zu starten, berechnen Sie η_1 und η_2 über das explizite Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung aus der Vorlesung.

Lösen Sie die gegebene Anfangswertaufgabe mit Ihrem Programm für $k = 0, 1, \ldots, 4$ Korrektorschritte. Wählen Sie bei festem k als Schrittweite jeweils $h = \frac{1}{2^m}$, $m = 3, \ldots, 12$ und geben Sie für jedes m die Schrittweite h, den globalen Fehler $\epsilon(h)$, sowie die geignete Quotienten aus, um die Ordnung zu bestimmen. Geben Sie für $m = 3$ die approximierte Lösungen zu $k = 0, 1, \ldots, 3$ und die exakte Lösung $y(t)$ graphisch aus. Was können Sie beobachten? Vergleichen Sie Ihre Beobachtungen mit Resultaten aus der Vorlesung und kommentieren Sie alle Resultate ausführlich.