Numerik der Differentialgleichungen (WS 2011/12)

Übungsblatt 1 — Abgabe: Mi, 2. November 2011, bis 8^{30} Uhr, *Kasten E6*

Sachs/Groß — im Foyer des E-Gebäudes

Aufgabe 1: (3+3 Punkte)

i) Betrachten Sie das Anfangswertproblem $y'(x) = f(x, y(x)),\ y(x_0) = y_0$ wobei f zweimal stetig differenzierbar sei. Zeigen Sie, dass das verbesserte Euler-Verfahren (*Def. I.2.1*)

$$\eta_{i+1} = \eta_i + hf\left(x_i + \frac{h}{2}, \eta_i + \frac{h}{2} f(x_i, \eta_i)\right)$$

die Konsistenzordnung 2 besitzt.

ii) Zeigen Sie ebenfalls, unter den Vorraussetzungen aus i), dass das Heun-Verfahren

$$\eta_{i+1} = \eta_i + \frac{h}{2}\left(f(x_i, \eta_i) + f(x_i + h, \eta_i + hf(x_i, \eta_i))\right)$$

die Konsistenzordnung 2 besitzt.

Programmieraufgabe 1: (10 Punkte)

Die Population des Fichtenknospen-Wurms (spruce budworm), der in der Lage ist, mit hoher Effizienz die kanadische Balsamfichte zu entnadeln, wird durch folgendes Populationsmodell beschrieben:

$$\begin{aligned} P'(t) &= aKP(t) - aP^2(t), \quad 0 \le t \le T \\ P(0) &= P_0. \end{aligned}$$

Hierbei ist a die Vermehrungsrate des Fichtenknospen-Wurms und K die Sättigungspopulation, die durch die Dichte der verfügbaren Fichten gegeben ist. Im folgenden sei $a = 0.1$, $K = 20$ und $T = 5$.
Die obige Anfangswertaufgabe (AWA) wird durch folgende Funtkion exakt gelöst:

$$P(t) = \frac{KP_0}{P_0 + (K - P_0)\,\mathrm{e}^{-aKt}}$$

Programmieren Sie mit **MATLAB** das explizite Euler-Verfahren, das Heun-Verfahren und das folgende explizite Verfahren,

$$\eta_{i+1} = \eta_i + \frac{h}{4}\left(f(x_i,\eta_i) + 3f(x_i + \frac{2h}{3}, \eta_i + \frac{2h}{3} f(x_i + \frac{h}{3}, \eta_i + \frac{h}{3} f(x_i,\eta_i)))\right), \qquad (*)$$

zur Lösung der obigen Differentialgleichung mit den Schrittweiten $h = \frac{1}{2^m}$, $m = 1, 2, \ldots, 13$ und Anfangswert $P_0 = 2$. Vergleichen Sie die approximierte Lösung mit deren exakter Lösung. Für jede Schrittweite h berechnen Sie dazu den Fehler

$$\epsilon(h) := \max_{i=1,\ldots,n} |\eta_i - P(x_i)|,$$

wobei $x_i = P_0 + hi$ $i = 1, \ldots, n$ und n Anzahl der Diskretisierungspunkte, welche aus der Wahl der Schrittweite resultiert. Geben Sie die Quotienten $\epsilon(h)$, $\epsilon(h)/h$, $\epsilon(h)/h^2$, $\epsilon(h)/h^3$, $\epsilon(h)/h^4$ tabellarisch aus. Welche Ordnung hat das Verfahren $(*)$?
Drucken Sie die Graphen des berechneten Populationsbestandes P auf dem Intervall $[0, 5]$ für die 2 Schrittweiten $h = \frac{1}{4}, \frac{1}{2^{10}}$ aus und beschreiben Sie Ihre Beobachtungen.

Programmierhinweise

Laden Sie den Matlab-Quellcode (als `txt-file` abgespeichert !!!) versehen mit Namen und Matrikelnummer im StudIP hoch. Die abzugebende Datei muss folgenden Namen haben und dann als Textdatei `.txt` abgespeichert in StudIP hochgeladen werden:

`NachnameMatrikelnummerAufgabennummer.txt`

In der den ersten Zeilen des `m-file` stehen mit `%` auskommentiert:

- Name
- Matrikelnummer
- Aufgabennummer
- Datum

Drucken Sie ebenfalls den die Ergebnisse (Tabellen und Graphen) der Programmieraufgabe aus und geben Sie diese zusammen mit dem Übungszettel ab.
Kommentieren Sie immer die Ergebnisse!