Numerik (SoSe 2012)

Übungsblatt 9 — Abgabe: Di, 26. Juni 2012, bis 16^{30} Uhr, *Kasten E6*

Groß/Sachs — im Foyer des E-Gebäudes

Aufgabe 19: (4+3 Punkte)

i) Berechnen Sie für ein Integral der Form

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt$$

die Gaußpunkte t_1, t_2 sowie die zugehörigen Gewichte α_1, α_2 für eine Gaußquadratur mit diesen zwei Gaußpunkten als Stützstellen.
(*Tipp: Nullstellen des Legendre Orthogonalpolynoms*).

ii) Benutzen Sie die Gewichte und Stützstellen (Gaußpunkte) aus i), um folgende Integrale mittels Gaußscher Quadraturformel zu approximieren:

α) $\int_{-1}^{1} 1 + 4x^2 - x^3 dx$

β) $\int_{-1}^{1} \cos(x)dx$

γ) $\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^x dx$

Aufgabe 20: (5+3+3 Punkte)

Sei $(P_k : [-1,1] \to \mathbb{R})_{1 \le k \le n}$ $n \in \mathbb{N}$ eine Folge von Orthogonalpolynomen

i) Zeigen Sie, dass folgende Aussage stimmt:
Das Orthogonalpolynom P_n hat genau n einfache Nullstellen im Intervall $(-1, 1)$.

ii) Berechnen und Plotten Sie auf dem Intervall $[-1, 1]$ die ersten Legendre Orthogonalpolynome P_n bis zum Grad $n = 8$ und verifizieren Sie die obige Aussage aus i).
Benutzen Sie dazu diese vereinfachte Rekursionsformel:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x \\ P_{n+1}(x) &= \frac{1}{n+1}\left((2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)\right) \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

iii) Berechnen und Plotten Sie auf dem Intervall $[-1, 1]$ die ersten Tschebyscheff Orthogonalpolynome T_n bis zum Grad $n = 8$ und verifizieren Sie ebenfalls die Aussage aus i).
Benutzen Sie dazu diese vereinfachte Rekursionsformel:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_{n+1}(x) &= 2(n+1)T_n - T_{n-1} \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Programmieraufgabe 7: (8 Punkte)

Schreiben Sie ein Matlab-Programm, welches die summierten Trapezsummen und summierte Simpsonregel für die folgenden Testbeispiele berechnet.

$$\text{Treppenfunktion: } \int_3^4 f(x)dx \text{ mit } f(x) = \begin{cases} 0.5 & x \leq \pi \\ 1.0 & x > \pi \end{cases}$$

$$\text{sinus-Funktion: } \int_0^\pi f(x)dx \text{ mit } f(x) = \sin(x)$$

Verwenden Sie für die Anzahl der Stützstellen die Werte $m = 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128$. Erstellen Sie eine Textdatei mit den Werten

$$\text{m} \mid T(h) \mid \text{Fehler: } \|T(h) - I\|$$

Plotten Sie Schrittweite und Fehler mit doppelt logarithmischer Skala (`loglog(h,Error)`). Kommentieren Sie Ihre Ergebnisse. Wie kann man aus den Grafiken die Fehlerordnung ablesen? Was für ein Problem tritt bei der Treppenfunktion auf und wie kann man dieses beheben?

Programmieraufgabe 8: (12 Punkte)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f \in C^5[a, b]$. Betrachten Sie für eine gegebene Stützstelle $z \in [a, b)$ und Schrittweite $h > 0$ mit $z + h \in (a, b]$ die folgenden Approximationen von $\int_z^{z+h} f(x)dx$ mittels der Simpson-Regel bzw. der zusammengesetzten Simpson-Regel:

$$\begin{aligned} S(z, z+h) &= \frac{h}{6}\left[f(z) + 4f\left(z + \frac{h}{2}\right) + f(z+h)\right] \\ ZS(z, z+h) &= \frac{h}{12}\left[f(z) + 4f\left(z + \frac{h}{4}\right) + 2f\left(z + \frac{h}{2}\right) + 4f\left(z + \frac{3h}{4}\right) + f(z+h)\right] \end{aligned}$$

Der Integrationsfehler der zusammengesetzten Simpson-Regel

$$\int_z^{z+h} f(x)dx - ZS(z, z+h) = \frac{1}{15}(ZS(z, z+h) - S(z, z+h)) + \mathcal{O}(h^6)$$

legt nahe, den Term $\frac{1}{15}(ZS(z, z+h) - S(z, z+h))$ zur adaptiven Steuerung der Integrationsschrittweite h entsprechend des Algorithmus 1 zur Approximation von $\int_a^b f(x)dx$ einzusetzen: Programmieren Sie Algorithmus 1 in Matlab, um das Integral $\int_0^\infty f(x)dx$ über die Dichte f der Lognormalverteilung

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp(-(\log x)^2/2) & , \ x > 0 \\ 0 & , \ x \leq 0 \end{cases}$$

zu berechnen. Wählen Sie $a = 0$, $b = 35$, $h_{\max} = 10$, $h_{\min} = 1e-4$, $\eta_1 = 1e-9$, $\eta_2 = 1e-6$ und geben Sie für jede Iteration Iteration (d.h. falls $ZS(z, z+h)$ akzeptiert und k um eins erhöht wird) des Algorithmus die Größen k, z, h sowie $ZS(z, z+h)$ aus. Plotten Sie ferner die Funktion f sowie die erhaltenen Stützstellen z in ein gemeinsames Koordinatensystem. Was können Sie beobachten?

Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem analytisch berechneten Wert $\int_0^\infty f(x)dx = 1$ und messen Sie die Rechenzeit der adaptiven Integration. Wie groß müsste man die äqudistante Schrittweite h bei der zusammengesetzten Simpson-Regel (ZS) mit konstanter Schrittweite h wählen, um ein ähnlich exaktes Ergebnis zu erhalten? Welche Rechenzeit würde ein solches Verfahren benötigen? Kommentieren Sie Ihre Ergebnisse ausführlich.

Algorithm 1 Adaptive Simpson-Regel

Initialisierung:
Seien $h_{\max} > h_{\min} > 0$ und $\eta_2 > \eta_1 > 0$ gegeben. Setze $z = a$, $h = h_{\max}$, $I = 0$ und $k = 0$.
Algorithmus:

While $z < b$ do
    If $z + h > b$ setze $h = b - z$.
    Berechne $S(z, z+h)$ und $ZS(z, z+h)$.
    If $|ZS(z, z+h) - S(z, z+h)|/15 > \eta_2$ und $h_{\min} < h$
        $h = \max(h/2, h_{\min})$
    else
        Setze $z = z + h$, $I = I + ZS(z, z+h)$ und $k = k + 1$.
        If $|ZS(z, z+h) - S(z, z+h)|/15 < \eta_1$ wähle $h = \min(2h, h_{\max})$.
    end
end

Laden Sie den Quellcode (als `m-file` abgespeichert) versehen mit Namen und Matrikelnummer im StudIP hoch! Die abzugebende Datei muss folgenden Namen haben:

`NachnameMatrikelnummerAufgabennummer.m`

In der den ersten Zeilen des `m-file` stehen mit `%` auskommentiert:

- Name, Matrikelnummer, Studienfach

Drucken Sie die Ergebnisse (nicht den Quellcode) der Programmieraufgabe aus und geben Sie diese zusammen mit dem Übungszettel ab.